学会賞

ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張*

Extensions of Risk-Based Portfolio with Black-Litterman Model

野村アセットマネジメント株式会社　資産運用先端技術研究室　クオンツアナリスト
中川　慧 / *Kei NAKAGAWA*

キーワード（Key Words）

リスクベース・ポートフォリオ（Risk-Based Portfolio），
ブラック・リッターマン法（Black-Litterman Model），資産配分（Asset Allocation）

〈要　約〉

近年，伝統的な平均分散法に代わって，推定が困難な期待リターンを必要とせず，リスクのみに着目したリスクベース・ポートフォリオが注目を集めている．このようなリスクベースのポートフォリオ構築手法として，最小分散，リスク・パリティ，最大分散度ポートフォリオなどが代表的である．一方で，リスクベース・ポートフォリオは期待リターンを捨象してしまっているため，特別な場合を除き平均分散の意味で効率的ではない．そこで，本稿ではブラック・リッターマン法に基づき，期待リターンを考慮したリスクベースのポートフォリオ構築手法を提案する．具体的には，リスクベース・ポートフォリオのウェイトから逆算したインプライド期待リターンを算出する．そしてその期待リターンと投資家の見通しを合わせることでリスクベース・ポートフォリオに期待リターンと見通しを導入することが可能となる．資産配分を例とした実証分析の結果，提案手法は良好なパフォーマンスを確認できた．

目　次

1．はじめに

Markowitz（1958）の平均分散法からSharpe（1964）のCAPMの一連の理論は現代ポートフォリオ理論の基盤をなすものである．現代ポートフ

*本論文は，2018年9月8日の「日本FP学会第19回大会」の発表における討論者，青山学院大学の亀坂安紀子氏より貴重な示唆を頂いた．また，野村アセットマネジメント株式会社の長生太郎氏，藤崎晴信氏の両氏には実務的な視点から意見を頂いた．ここに記して感謝する．なお，本論文は個人的な見解であり，ありうべき誤りはすべて筆者の責によるものである．

ォリオ理論において投資家は，リスク回避的である，つまり，同一の期待リターンをもたらす資産についてはリスク（分散）の小さい資産を選好することが仮定される．また投資家は自身の投資の収益率の分布について，その平均と分散のみを考慮すると標準的に仮定する．そしてリターンとリスクの間にはトレードオフの関係があり，それを考慮して最適なポートフォリオを選択する．このように平均と分散のみに着目したMarkowitz（1958）の平均分散法は，ポートフォリオ構築もしくは資産配分等の目的で実務において最も使用されてきた．また，平均分散法から発展したCAPMにおいては，個々のリスク資産の期待リターンは市場ポートフォリオに対するベータ・リスクに比例することが示される．資産運用の実務では，市場ポートフォリオの代理変数として時価総額加重型インデックスが用いられており，多くのベンチマーク・ベンダーから様々な指数が公表されている．

このように資産運用の実務に深く結びついている平均分散法およびCAPMであるが，それぞれ重大な問題点も指摘されている．

平均分散法を使用する上での最大の困難は，期待リターンの推定がリスクの推定に対して非常に難しいことである．例えば，債券のリスクと株式のリスクを比較したとき，株式の方が，リスクが大きいことは容易に推定できる．一方で，リターンを比較すると，債券と株式のリターンは経済環境によりその大小は大きく変化する．そのため期待リターンの推定は難しく，推定誤差が大きくなりがちである．こうした誤差が十分に抑制されている場合を除き，平均分散法は誤りの上に立ってポートフォリオを最適化する結果になる（Michaud（1989））．つまり，最適化手法は一般に，最も楽観的なリターンおよびリスクの推定値を持つ資産を高ウェイトで組み入れているポートフォリオを作り出すことが多い．その結果，平均分散法により構築されたポートフォリオは不自然で，極めてバランスが悪いケースが多い．

上述した問題に対処すべくBlack and Litterman（1992）により考案されたのが，ブラック・リッターマン法である．ブラック・リッターマン法は投資家の見通しをポートフォリオに反映することができるという利点を持ち，過去のデータが明らかに異常な場合等には非常に有効である．異常な値を補正することで，最適化の結果も極端な解に収束しにくくなり安定する．ブラック・リッターマン法は，市場ポートフォリオのウェイトを用いて，平均分散法を逆に利用することで，各資産のインプライド・期待リターンを算出する．このインプライド・期待リターンと投資家の見通しを合成して新たな期待リターンと分散－共分散行列を導出する．そして，それらを用いて再び平均分散法でポートフォリオ構築を行う．したがって，ブラック・リッターマン法はその構築手法からCAPMに依拠したポートフォリオ構築方法であると言える．

しかしながら，多くの実証研究は概ね，CAPMの予測力を否定している（Fama and French（2004））．さらに，Roll（1977）によると，CAPMにおける中核となる概念，「市場ポートフォリオ」を実際に観測することは事実上不可能という理由から，本質的に検証不可能であるという見解も出された．

加えて，市場ポートフォリオの代理変数として利用される時価加重インデックスが平均－分散の意味で効率的ではないことは，Clarke *et al.*（2006）や山田・上崎（2009），竹原（2012）でも指摘されているように広く知られている．

以上を踏まえると，投資家はCAPMをポートフォリオ構築手法としては否定し，他の構築手法を探そうとするだろう．CAPMが否定されれば，ベンチマークとして多く採用される時価総額加重ポートフォリオが，取得するリスクに対して魅力的なリターンを得られると信じる根拠はなくなる．そこで投資家は，典型的な時価総額加重ポートフォリオより良いリスク・リターン関係を導き出せるポートフォリオ構築手法がないか模索し始めている．そうした試みの中，推定の難しい期待リターンの推計を必要とせず，リスクのみに基づきポートフォリオを構築するリスクベースのポートフォリオ構築方法が実務を中心に注目を集めている．リスクベースのポートフォリオ構築手法としては，リスク・パリティ，最小分散，最大分散度などがある．リスクベースのポートフォリオは構築手法のわかりやすさや，多くの実証分析の結果から平均分散法（De Carvalho *et al.*（2012））や時価総額加重型ポートフォリオ（Chaves *et al.*（2011））に比べて良好なパフォーマンスを獲得できることが明らかになっている．さらにリスクベース・ポートフォリオは平均分散法とは異なり，共分散行列の推定精度にパフォーマンスがあまり左右されない（Nakagawa *et al.*（2018））．また，リスクを分散だけではなく，高次のモーメントである歪度，尖度までリスクと捉え，リスクベース・ポートフォリオを高次モーメントへ拡張する試みもある（Baitinger *et al.*（2017），中川（2017））．

しかしながら，なぜこれらのリスクベース・ポートフォリオのパフォーマンスが優れているかについての説明は難しく，議論の分かれるところで

もある．リスクベース・ポートフォリオは期待リターンを捨象してしまっているため，特別な場合を除き平均分散の意味で効率的ではない．投資家は純粋にリスクに基づくアプローチを取るなら，このアプローチによって生じる期待リターンは，取得するリスクと比して魅力的だと思う理由を理論的に確認する必要がある（Lee（2011））．直感的にはリスクベースのポートフォリオは，各資産の期待リターンがリスクと比例関係にある，つまりシャープ・レシオが各資産で一定である場合には，平均分散の意味で効率的になる．各リスクベース・ポートフォリオの前提および関係性については次節で確認する．

リスクベース・ポートフォリオは，期待リターンを明示的には考慮しないため，ブラック・リッターマン法のように投資家の見通しをポートフォリオに反映することができない．一方で，ブラック・リッターマン法はCAPMを前提としているため，時価総額加重ポートフォリオが効率的でないならば，そこから算出されるインプライド・期待リターンも妥当性を失う．

そこで本研究では，両者を組み合わせることで，互いの欠点を補完する．すなわち，まずリスクベースのポートフォリオ構築手法によってウェイトを計算し，当該リスクベース・ポートフォリオのウェイトから，インプライド・期待リターンを導出する．これにより，ブラック・リッターマン法の前提であり実証的に否定されているCAPMに依拠した時価加重ウェイトではなく，実証的に効率的であるリスクベース・ポートフォリオに依拠したポートフォリオが構築できる．そして，その期待リターン，および分散―共分散行列に投資家の見通しをブラック・リッターマン法に基づき合成する．最後に合成した期待リターンと分散－共分散行列を用いて，平均分散法に基づくポートフォリオ最適化を行う手法を提案する．以上により，期待リターンの水準を考慮できないリスクベース・ポートフォリオに期待リターンと見通しを考慮した柔軟なポートフォリオが構築できる．つまり，本手法は，ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張と言える．提案手法を用いた実証分析の結果，CAPMの時価総額加重型よりも良いインプライド期待リターンをベースに投資家の見通しを織り込むことが期待できる．資産配分を例とした実証分析の結果，提案手法は良好なパフォーマンスが確認できた．

本論文の構成は次の通りである．第2節では，先行研究であるブラック・リッターマン法とリスクベース・ポートフォリオを整理するとともに，どの点がそれぞれ課題としてあるかを明確にする．第3節では，提案手法であるブラック・リッターマン法に基づくリスクベース・ポートフォリオの構築手法を提案する．第4節では，提案手法を含む様々なポートフォリオ構築手法を，資産配分を例に比較分析する．そして最後にまとめを述べる．

2．先行研究

2.1　ブラック・リッターマンモデル

Markowitz（1958）の平均分散法は，いくつかの問題点が指摘されている．例えば，一部の資産クラスに片寄った配分結果となる，推定に用いるデータ期間や目標リターンを少し変更しただけで極端に異なる配分結果となるなどがある．これは，最適化の結果が，リスクや相関よりも期待リターンに鋭敏に反応するためである（Michaud（1989））．

このような問題に対処すべくBlack and Litterman（1992）により考案されたのが，ブラック・リッターマン法である．通常，投資家は特定の資産に対して，見通しを持っている．たとえば，株式よりも債券に対して強気だとか，国内資産よりも外国資産に対して強気だとかである．ブラック・リッターマン法は，このような投資家の個別資産への見通し（期待収益率）を，アセット・アロケーションに反映させ，かつ，他の資産と整合的に変化させるモデルである．すなわちブラック・リッターマン法では，投資家が，見通しを持っていた場合の最適なアセット・アロケーションを求めることができる．このように投資家の見通しを反映させ，期待リターンを補正することで，最適化の結果も極端な解に収束しにくくなり，安定する．以下では，Satchell and Scowcroft（2000）にならい，具体的なブラック・リッターマン法を簡単にまとめる．

N個の資産の真の期待リターンμを確率変数とする．つまり，投資家は期待リターンの値を事前にはわからないということを仮定している．さらに，Πを以下のような方法で特定した，観測された期待リターンとする．CAPMが成立しているのであれば，次が成立する．

$$\boldsymbol{\Pi} = \delta \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_{eq} \tag{1}$$

ここでδはリスク回避係数であり，市場ポートフォリオのリスク・プレミアムを分散で割ったものである．Σは資産リターンの分散―共分散行列，w_{eq}は市場ポートフォリオのウェイトベクトル，つまり各資産の時価総額を市場全体の時価総

額で割ったものを並べたベクトルである．また，Πの確率分布は平均μ，分散$\tau\Sigma$のn変量正規分布であると仮定する．したがって，

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \tau\boldsymbol{\Sigma}) \tag{2}$$

ここで，τは投資家が考えているΠの正確さの程度を表している．$\tau=0$ならば，投資家は観測されたΠが真の期待リターンμと一致していると考えていると解釈できる．

さらに投資家は事前に期待リターンに対してある程度の見通しを持っているとする．Qをk個の変数で表される投資家の期待リターンに対する見通しとすると，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P\mu} + \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Omega}) \tag{3}$$

ここで，Pはk行n列の行列であり，Qはk次のベクトル，Ωはk次の対角行列である．Pはどの資産に対する見通しを表すかを示すウェイトベクトル，Qは当該見通しの期待リターン，Ωは見通しの不確実性をそれぞれ表す．例えば，資産A, B, Cという3資産があった時，資産Aのリターンが5%，資産Bのリターンは資産Cを1%上回り，それぞれの見通しの不確実性は，ω_{11}およびω_{22}であるという見通しを反映させるには，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5\% \\ 1\% \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

とすれば良い．

ここで求めたいのは，真の期待リターンμであって，(2)－(4) 式から，$Y=(\Pi, Q)^{\mathrm{T}}$，$X=(I, P)^{\mathrm{T}}$，$u=(\varepsilon, \eta)^{\mathrm{T}}$とする．さらに$u$の分布は $\boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi}) \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \tau\boldsymbol{\Sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$ と書ける．すると，$Y=X\mu+u$という回帰式が得られ，一般化最小二乗推定量（浅野・中村(2009)）より，$\mu=(X^{\mathrm{T}}\Psi^{-1}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\Psi^{-1}Y$およびその分散を考えることで，真の期待リターンの推定量μ_{BL}とその分散―共分散行列Σ_{BL}を次の通り求めることができる．

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = ((\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}((\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Pi}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} = ((\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1} \tag{6}$$

つまり，（Πが観測された後という意味で）事後的な期待リターンμの分布は平均μ_{BL}，分散Σ_{BL}の正規分布に従う．以上から，投資家は平均分散分析に使う期待リターンをμ_{BL}とすれば，観測された期待リターンΠと事前的な自身の信念を組み合わせた上でポートフォリオ選択が可能になる．

2.2　リスクベース・ポートフォリオの先行研究

本節では，広く知られたリスクベースのポートフォリオ構築手法を先行研究に言及しながら概観するとともに，各ポートフォリオがそれぞれどのような関係にあるかを整理する．以下では，N個の資産の収益率（確率変数）を$R=(R_1, \cdots, R_N)^{\mathrm{T}}$，ウェイトを$w=(w_1, \cdots, w_N)^{\mathrm{T}}$，期待リターンを$\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_N)^{\mathrm{T}}$，分散共分散行列を$\Sigma=E[(R-\mu)(R-\mu)^{\mathrm{T}}]$と書く．

2.2.1　最小分散

最小分散ポートフォリオはMarkowiz（1952）が展開した平均分散法に基づき，効率的フロンティア上にあるポートフォリオのうち，最もリスクが小さいポートフォリオを指す．つまり期待リターンとリスク回避度を用いず，ポートフォリオの分散（リスク）であるσ_P^2のみを最小化するという以下の式の解をウェイトとするポートフォリオである．

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{w}} \sigma_P^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \\ \mathrm{s.t.}; \boldsymbol{1}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{w} = 1, \quad 0 < w_i < 1 \end{gathered} \tag{7}$$

最小分散ポートフォリオは投資対象の各資産の期待リターンが全て同一であれば，平均分散の意味でも効率的なポートフォリオになる．最小分散ポートフォリオが注目される理由には Clarke *et al.*（2006）や山田・上崎（2009）等の興味深い実証結果がある．Clarke *et al.*（2006）は，1968年から2005 年までの長期 の米国の株式市場を対象とした最小分散ポートフォリオが，運用のパフォーマンス評価のベンチマークとして用いられる時価総額加重ポートフォリオと比べて，リスクが低くリターンが高いという結果を報告している．同様に山田・上崎（2009）は日本の株式市場を対象とした実証分析を行い，時価加重型のポートフォリオに比して，高いリスク調整後のリターンを獲得していることを示した．これらは低ボラティリティ・アノマリーと呼ばれ，既存の時価総額をベースとしたポートフォリオによるリスク・リターンの考え方に一石を投じた．

2.2.2　リスク・パリティ

リスク・パリティは全ての資産のリスク寄与度（配分）が等しいポートフォリオである（Qian

(2005))．リスク・パリティの具体的な定式化のため，ポートフォリオのリスク$\sigma_P = \sqrt{\boldsymbol{w^T \Sigma w}}$をウェイト$w$で微分した(8)式の限界リスク寄与(Marginal Risk Contribution; MRC)を定義する．これによりポートフォリオのリスクは，(9)式のようにMRCを用いて分解することができる．そして(9)式をポートフォリオのリスクで除すことで，ある資産が全体のリスクに占める割合，すなわち(10)式のリスク寄与度(Risk Contribution; RC)が定義される．リスク・パリティの満たす条件は，このRCが各資産で一定になることである．

一般に年金運用のポートフォリオには，リスク寄与度に大きな偏りがあると言われてきた．債券と株式に分散投資をしても，株式のリスクは債券より大幅に大きいため，ポートフォリオのリスク寄与度は株式がほとんどとなる．そもそも分散投資を行うねらいは，ある資産が不調の時に，他の資産で全体のパフォーマンスを支えるためである．しかし，株式のリスク寄与度が大半を占める状態では，他の資産が株式の不調を補うまでには至らず，期待した分散投資による効果が得られない．リスク・パリティは，こうした状態に対する代替案として提唱された．

このようなリスク・パリティの概念は，資産配分手法の1つとして多くの先行研究がある．Qian (2005)は，株式と債券への投資割合が60：40の伝統的なバランス型のポートフォリオと比較して，リスク・パリティのパフォーマンスがシャープ・レシオで測ってより効率的であることを実証している．

$$MRC = \frac{\partial \sigma_P}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma w}}{\sigma_P},\ MRC_i = \frac{(\boldsymbol{\Sigma w})_i}{\sigma_P} \tag{8}$$

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \times MRC_i = \boldsymbol{w^T} MRC \tag{9}$$

$$RC_i = \frac{w_i \times MRC_i}{\sigma_P} \tag{10}$$

また空売りを許さない場合には，Maillard *et al.* (2010)において(11)式の最小化問題を解くことで効率的にウェイトが計算できることが示されている．また，Maillard *et al.* (2010)は(11)式の最適化問題は凸最適化問題であり，唯一の最小解を持つことも示した．

$$\min_{\boldsymbol{w}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(RC_i - RC_j\right)^2 \tag{11}$$

$$\text{s.t.};\ \boldsymbol{1^T w} = 1,\quad 0 < w < 1$$

リスク・パリティを計算する際に，(12)式のように資産間の相関を考慮せずにボラティリティのみでリスクの寄与度を一定にするいわゆるボラティリティ・インバースもリスク・パリティの一種として考えられている．

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i}} \tag{12}$$

2.2.3 最大分散度

Choueifaty and Coignard (2008)は，ポートフォリオの分散効果が最も享受できる最大分散度ポートフォリオを提案した．これは(13)式で定義される分散度(Diversification Ratio; DR)というポートフォリオのリスクに対する平均ボラティリティを最大化するポートフォリオであり，具体的には相関の低い資産をより多く組み入れるポートフォリオである．彼らは，最大分散度ポートフォリオが時価加重型のポートフォリオや他のリスクベースのポートフォリオよりも上回るパフォーマンスを上げると報告している．

$$\max_{\boldsymbol{w}} \mathrm{DR}(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i}{\sigma_P} \tag{13}$$

またChoueifaty and Coignard (2008)によると，DRは以下のようなボラティリティで加重した平均相関$\rho(w)$とボラティリティで加重したボラティリティの集中度$CR(w)$を用いて表すことができる．

$$DR(\boldsymbol{w}) = [\rho(\boldsymbol{w})(1 - CR(\boldsymbol{w})) + CR(\boldsymbol{w})]^{-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\rho(\boldsymbol{w}) = \frac{\sum_{i \neq j}(w_i \sigma_i w_j \sigma_j)\rho_{ij}}{\sum_{i \neq j}(w_i \sigma_i w_j \sigma_j)} \tag{15}$$

$$CR(\boldsymbol{w}) = \frac{\sum_i (w_i \sigma_i)^2}{(\sum_i w_i \sigma_i)^2} \tag{16}$$

ここで相関行列の対角項以外が全て一定の場合には，$\rho(w)$を定数c(一定)とおけるので，(13)式は，

$$\max_{\boldsymbol{w}} \mathrm{DR}(\mathbf{w}) = [c + (1 - c)CR(\boldsymbol{w})]^{-\frac{1}{2}} \tag{17}$$

となる．(17)式において，$DR(w)$が最大になるのは，ウェイトがボラティリティの逆数，すなわちボラティリティ・インバース(リスク・パリティ)であるときである．同様に分散が全て一定の場合には，分子が定数c(一定)とおけるので，

$$\max_{\boldsymbol{w}} \mathrm{DR}(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i}{\sigma_P} = \frac{c}{\sigma_P} \tag{18}$$

(18) 式は分母の最小化がDRの最大化となり，最小分散と等しくなる．このように最大分散度とリスク・パリティ，最小分散ポートフォリオは特定の条件下で等しい．

2.2.4 各ポートフォリオ間の関係

投資家は以上のようなリスクベース・ポートフォリオを採用するなら，この手法によって生じる期待リターンが，取得するリスクと比して魅力的だと思う理由を理論的に確認する必要がある（Lee（2011））．なぜならリスクベース・ポートフォリオは期待リターンを考慮していないため，構築したポートフォリオが平均分散の意味で効率的な最適ポートフォリオである保障はないからである．ただし，投資対象資産が特定の条件を満たす場合には平均分散の意味で効率的になる．その条件と各リスクベースのポートフォリオがどのような関係にあるかを整理したのが図1である．例えば，最小分散が平均分散の意味で効率的と言えるのは，すべての資産の期待リターンが等しい場合や，どの程度の期待リターンが得られるのか全く確信が持てないため，すべての資産の期待リターンが等しいと考えても個別資産の期待リターンを推定するのと変わらないと考える場合である．またリスク・パリティと最大分散度は，各資産の期待リターンがそれぞれのリスクにほぼ比例する場合，すなわちシャープ・レシオがほぼ一定の場合には正当化される．一方で，リスク対比で大幅に高いリターンが得られる資産が存在する場合には，その資産に大きく配分できないリスク・パリティと最大分散度は効率的ではなくなる．また，投資対象資産のシャープ・レシオ及び相関が一定である場合には，リスク・パリティと最大分散度はボラティリティ・インバースと一致し，いずれも平均分散の意味で効率的なポートフォリオとなる．しかしながら，シャープ・レシオがほぼ一定でない場合には，かなり直感に反する意味合いを持つ．すなわち，リスク・パリティと最大分散度

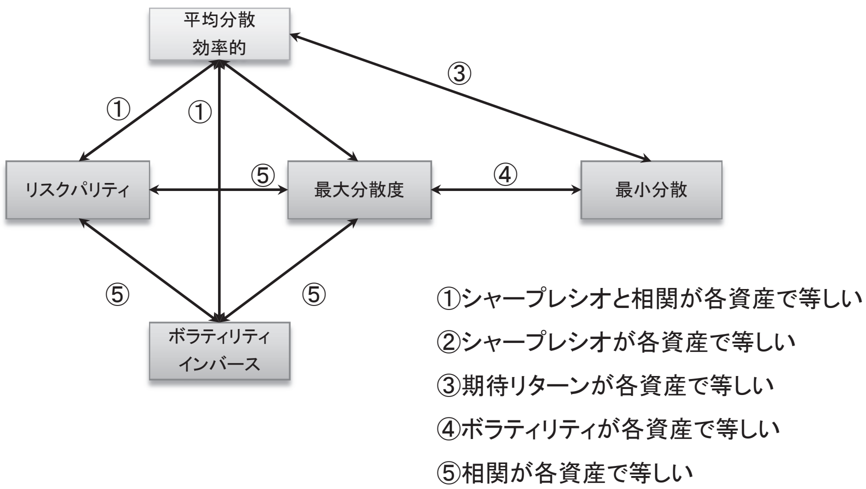

図1　リスクベースのポートフォリオ間の関係

大森・矢野（2013）を参考に筆者作成

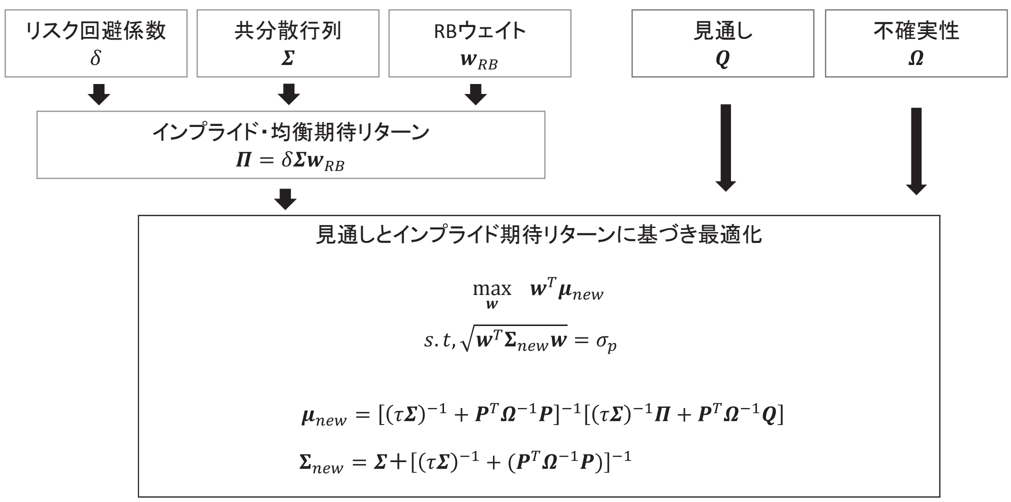

図2　ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張

が効率的であるとするなら，各資産への配分は，期待リターンと反比例することになる．

こういった各リスクベース・ポートフォリオが仮定するリスク・リターンの関係が直感に反する場合，もしくは，より良い見通しを投資家が持っていてそれを反映させたい場合にはリスクベース・ポートフォリオは応えることができない．そこで，次節ではこれらのリスクベース・ポートフォリオが平均分散の意味で効率的であるとした場合に逆算される期待リターンを元に，投資家の見通しを反映させる方法を提案する．

3．ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張

前節のブラック・リッターマン法はCAPMを前提としているため，時価総額加重ポートフォリオが，リスク・リターンで効率的であることを仮定している．実証的に時価総額加重ポートフォリオは効率的ではないため，そこから算出されるインプライド・期待リターンも妥当性を失う．また，ブラック・リッターマン法は低流動性資産において時価総額算出ができない可能性，あるいは時価総額をウェイトとすることの適正性といった問題も抱えている．例えば，De Jong and Stagnol（2016）でも指摘されている通り，債券の時価総額加重とは，負債額の多い国，または企業をオーバー・ウェイトするという直感に合わない構築手法である．

一方で，リスクベース・ポートフォリオの構築手法は期待リターンを明示的に考慮していない点，そして投資家の見通しを入れることはできない点が課題としてある．

そこで本節では，両者を組み合わせることで，互いの欠点を補完する手法を提案する．本手法は，ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張と言える．具体的な手順は下記の通りである（図2も合わせて参照）．

Step 1. リスクベースのポートフォリオ構築手法によってウェイトw_{RB}を計算する．
Step 2. 当該ウェイトから，インプライド・期待リターンΠを導出する．
Step 3. 期待リターン，および分散―共分散行列に見通しQ, Ωを合成する．
Step 4. 合成されたリターンμ_{new}，分散Σ_{new}を用いて，平均分散法に基づく最適化をする．

ここで，パラメータδについては，インプライド・期待リターンとサンプル期間の実績リターンとの最小二乗誤差が最小となるような係数としている．その他のパラメータについてはオリジナルのブラック・リッターマン法と同様である．重要となるのは投資家の信念における正確さを表すパラメータであるτ，Ωの値であるが，これらの値に何を使うべきかという決まった値はなく，投資家自身の選択にゆだねられている．これらパラメータ設定方法については様々な議論があるものの，本論文では，簡便のため次の方法を採用する．

パラメータτについて，Blamont and Firoozye（2003）は，まずΠの推定の標準誤差として$\tau\Sigma$を解釈する．したがって，τは観測数を1で割った値を使用する．また，パラメータΩについて，Meucci（2006）は対角行列であることを気にせず，$\Omega = \frac{1}{c} P \Sigma P^{\mathrm{T}}$を設定し，$c = \tau^{-1}$とした．

4．実証分析

本節では，資産配分を例に提案手法を含む複数のポートフォリオ構築手法を比較する．リスクベースのポートフォリオ構築手法として最小分散（MV），リスク・パリティ（RP），ボラティリティ・インバース（VI），最大分散度（MD），比較のためのベンチマークとして，平均分散法であるシャープ・レシオ最大化（SR），および最もヒューリスティックなポートフォリオ構築手法である等ウェイト・ポートフォリオ（EQ）を用いる．評価指標はシャープ・レシオを用いる．

表1　使用指数の月次リターンの基本統計量

	MSCI Japan	MSCI US	MSCI EMU	MSCI UK	CITI Japan	CITI US	CITI EMU	CITI UK
年率リターン	7.33%	10.05%	8.77%	8.83%	1.87%	3.66%	4.54%	5.86%
年率標準偏差	18.32%	13.63%	16.54%	12.95%	2.14%	4.35%	4.06%	6.15%
歪度	−0.43	−0.78	−0.48	−0.63	−0.20	0.01	−0.06	0.19
尖度	5.18	6.47	5.34	5.02	5.37	6.32	4.38	4.95
Jarque-Bera統計量	13.88	56.74	17.85	17.72	13.13	35.18	0.90	6.62
p値	0.10%	0.00%	0.01%	0.01%	0.14%	0.00%	63.80%	3.66%
サンプル数	いずれも171サンプル（ 2003/1/31-2017/3/31 ）							

表2　使用指数のリターンの相関行列

相関行列	MSCI Japan	MSCI US	MSCI EMU	MSCI UK	CITI Japan	CITI US	CITI EMU	CITI UK
MSCI Japan	1.00							
MSCI US	0.63	1.00						
MSCI EMU	0.66	0.83	1.00					
MSCI UK	0.56	0.82	0.84	1.00				
CITIJapan	-0.38	-0.16	-0.25	-0.12	1.00			
CITIUS	-0.35	-0.26	-0.32	-0.18	0.46	1.00		
CITIEMU	-0.13	-0.12	-0.08	-0.03	0.38	0.63	1.00	
CITIUK	-0.28	-0.18	-0.19	-0.07	0.43	0.72	0.62	1.00

4.1　データ

分析に用いるデータとして，日本，米国，英国，欧州の株式および債券指数の月次リターンデータを用いる．対象期間は2003/1/31-2017/3/31までで，171サンプルある．

株式はMSCI社が公表している各国の株式指数である，MSCI Japan（日本），MSCI USA（米国），MSCI EMU（欧州），MSCI UK（英国）を用いる. 債券はCITIグループが公表している各国の国債を組み入れた債券指数である，CITI Japanese Government Bond（日本），CITI US Government Bond（米国），CITI EMU Government Bond（欧州），CITI UK Government Bond（英国）を使用する．これらのデータはFACTSETより取得した．使用指数の基本統計量をまとめたのが表1，相関行列が表2である．表1から，米国および英国債券は金融資産としては珍しく正の歪度を持ち，欧州債券についてはJarque-Bera検定によっては正規性が棄却されない．その他の資産は英国を除き，1％水準で正規性は棄却される．表2から，株式，債券という資産内では弱い相関関係があり，債券と株は弱い逆相関関係にあることがわかる．

4.2　分析

4.2.1　インプライド・期待リターンを用いたポートフォリオ

分析はまず各リスクベース・ポートフォリオのインプライド・期待リターンの有効性を確認する．そのために各リスクベース・ポートフォリオのインプライド・期待リターンを期待リターンとして，SRと同じリスク水準をターゲットに最適化を行う．すなわち，$\tau=0$として，投資家はインプライド・期待リターンΠが真の期待リターンμと一致していると考えている場合である．各ポートフォリオが同一の分散－共分散行列で同一のターゲット・リスクを設定しているので，インプライド・期待リターンの差がポートフォリオのパフォーマンスの差となって現れる．期待リターンの具体的なポートフォリオ構築の手順は次の通りで，これを毎月末にパラメータの推定と最適化を行いリバランスする（1か月毎に下記の手順を繰り返す）．

Step 1：過去12か月の月次リターンから推定した標本分散―共分散行列Σを使用し，各指数の時価総額から，時価総額加重ウェイトw_{EQ}と各リスクベース・ポートフォリオのウェイトw_{RB}を計算する．

Step 2：(1)式を用いて，インプライド・期待リターンΠを算出する．

Step 3：時価総額加重ウェイトw_{EQ}から得られたインプライド・期待リターンを使用したSRを計算し，これをベンチマークとする．

$$\max_{\boldsymbol{w}} \quad \frac{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Pi}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}} \tag{19}$$

Step 4：Step 3で計算したSRのリスクσ_{SR}をターゲット・リスクとして，各インプライド・期待リターンを最大化するように最適化を行う．

$$\max_{\boldsymbol{w}} \quad \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Pi} \tag{20}$$

$$s.t, \sqrt{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}=\sigma_{SR}，\ \mathbf{1}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{w}=1，\ 0<w<1$$

結果をサマリーしたのが表3，各ポートフォリオの累積収益率の時系列推移をプロットしたのが図3，全期間の平均ウェイトを示したのが表4である．それぞれ各リスクベース・ポートフォリオからインプライド・期待リターンを算出した結果が，最小分散：MV_E，リスク・パリティ：RP_E，ボラティリティ・インバース：VI_E，最大分散度：MD_Eである．ベンチマークである時価総額加重ウェイト，および等ウェイトからインプライド・期待リターンを算出した結果がEQ_E，SRである．

表3　インプライド・期待リターンを用いたポートフォリオのサマリー

	MV_E	RP_E	VI_E	MD_E	EQ_E	SR
年率リターン	5.42%	7.51%	7.02%	5.45%	5.45%	6.04%
年率標準偏差	5.83%	7.30%	6.92%	5.70%	7.52%	7.77%
年率シャープ・レシオ	0.93	1.03	1.01	0.96	0.73	0.78
歪度	0.28	−0.47	−0.51	0.29	−0.68	−1.32
尖度	4.16	4.14	4.21	4.06	4.78	6.76
合計収益	71.79%	99.47%	93.04%	72.26%	72.23%	79.99%

表4　インプライド・期待リターンを用いたポートフォリオの平均ウェイト

	MV_E	RP_E	VI_E	MD_E	EQ_E	SR
MSCI Japan	0%	12%	10%	1%	17%	7%
MSCI US	0%	11%	6%	2%	12%	37%
MSCI EMU	0%	9%	11%	1%	9%	10%
MSCI UK	0%	15%	20%	3%	14%	7%
株式合計	0%	47%	46%	8%	52%	60%
CITI Japan	1%	19%	12%	1%	19%	11%
CITI US	24%	8%	9%	23%	10%	12%
CITI EMU	7%	6%	8%	6%	8%	2%
CITI UK	68%	20%	25%	62%	11%	14%
債券合計	100%	53%	54%	92%	48%	40%

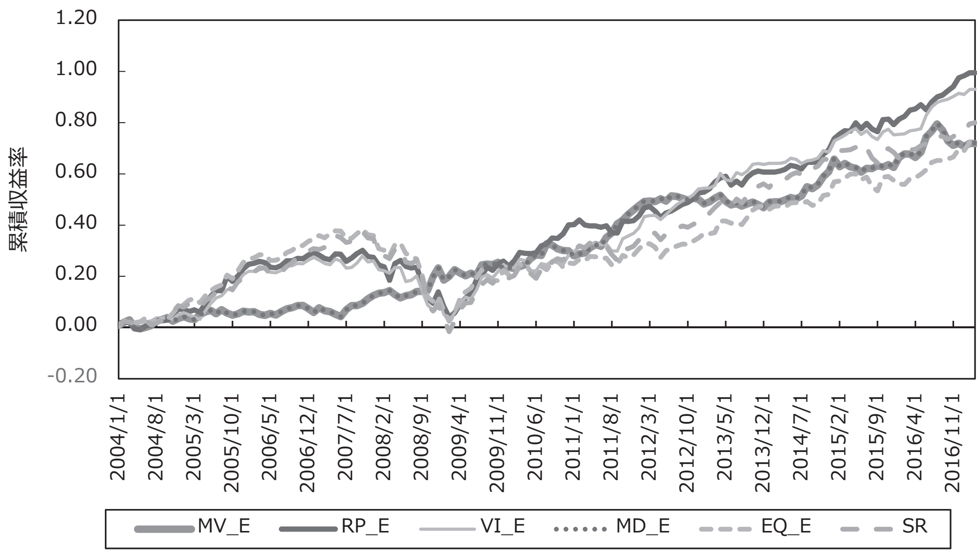

図3　インプライド・期待リターンを用いたポートフォリオの累積収益率の推移

表3から，ポートフォリオ構築時にはSRと同等のリスクをターゲットにするものの，事後的には全てのポートフォリオが5～7%程度のリスクとなっていることがわかる．またリスクベース・ポートフォリオからインプライド・期待リターンを計算した結果は，全てベンチマークであるEQ_EとSRを年率シャープ・レシオで上回ったことが確認できる．従って，時価総額加重ウェイトと等ウェイトより，リスクベース・ポートフォリオのウェイトを用いたインプライド・期待リターンの有効性が高いことがわかった．

表4を見ると，MV_EとMD_Eが株式のウェイトが極端に低く，ウェイトの集中が見られる．その他のポートフォリオはおおむね株式と債券を半分ずつ組み入れられており，平均分散法で問題となっていたウェイトの集中は見られない．

4.2.2　インプライド・期待リターンに見通しを反映したポートフォリオ

次に，各インプライド・期待リターンに，投資家の見通しを反映したポートフォリオを構築する．それらポートフォリオに見通しを反映することで，どの程度効果があるのかを確認する．見通しとしては，検証が容易であり，資産クラスを問わず広く存在するとされるモメンタム（Moskowitz *et al*.（2012），Asness *et al*.（2013））

表5　見通しを反映させたポートフォリオのサマリー

	MV_BL	RP_BL	VI_BL	MD_BL	EQ_BL	SR_BL
年率リターン	4.16%	4.14%	4.39%	3.96%	6.34%	5.32%
年率標準偏差	3.77%	3.41%	3.99%	3.51%	6.55%	8.09%
年率シャープ・レシオ	1.10	1.21	1.10	1.13	0.97	0.66
歪度	0.41	0.19	−1.42	−1.17	−0.89	−0.74
尖度	7.02	4.80	12.93	8.56	5.30	6.36
合計収益	55.15%	54.82%	58.23%	52.50%	84.00%	70.49%

表6　見通しを反映させたポートフォリオの平均ウェイト

	MV_BL	RP_BL	VI_BL	MD_BL	EQ_BL	SR_BL
MSCI Japan	7%	6%	4%	7%	12%	6%
MSCI US	4%	5%	6%	4%	11%	34%
MSCI EMU	4%	4%	4%	4%	11%	10%
MSCI UK	3%	5%	6%	3%	13%	7%
株式合計	17%	20%	19%	17%	47%	58%
CITI Japan	63%	38%	38%	63%	13%	11%
CITI US	11%	18%	16%	11%	13%	12%
CITI EMU	9%	14%	16%	9%	12%	2%
CITI UK	0%	10%	11%	0%	13%	18%
債券合計	83%	80%	81%	83%	53%	42%

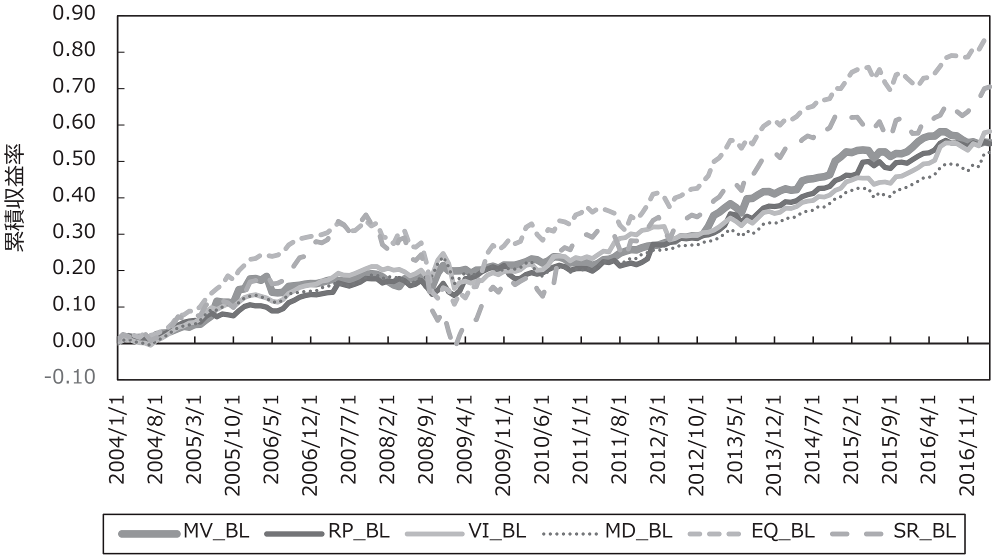

図4　見通しを反映させたポートフォリオの累積収益率の推移

を使用する．具体的なポートフォリオ構築の手順は先のStep3と4を次の通り変更し，これを毎月末に行う．

Step 3'：各資産の見通しQとして，Moskowitz *et al.*（2012）やAsness *et al.*（2013）などでも広く知られている直近の月を除いた12カ月のリターンすなわち，モメンタムを使用する．従って，Pは単位行列であり，その他のパラメータは$\tau = 1/12$（Blamont and Firoozye（2003）），$\Omega = \tau P \Sigma P^{\mathrm{T}}$（Meucci（2006））とした．以上を用いて合成した期待リターンμ_{new}と分散—共分散行列Σ_{new}を計算する．

Step 4'：各ポートフォリオのリスクσ_Pをターゲット・リスクとして合成した期待リターンを最大化するように最適化を行う．

$$\max_{\boldsymbol{w}} \ \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}_{new} \tag{21}$$

$$s.t, \ \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_{new} \boldsymbol{w}} = \sigma_P, \ \ \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{w} = 1, \ \ 0 < w < 1$$

結果をサマリーしたのが表5，各ポートフォリオの累積収益率の時系列推移をプロットしたのが図4，全期間の平均ウェイトを示したのが表6である．各リスクベース・ポートフォリオに見通しを合成した結果がそれぞれ，最小分散：MV_BL，リスク・パリティ：RP_BL，ボラティリティ・イ

ンバース：VI_BL，最大分散度：MD_BLである．ベンチマークである時価総額加重ウェイト，および等ウェイトから見通しを合成した結果がEQ_BL，SR_BLである．

表5から，リスクベース・ポートフォリオにモメンタムに基づく見通しを合成した結果は，全てベンチマークであるEQ_BLとSR_BLを年率シャープ・レシオで上回った．また全てのリスクベース・ポートフォリオは見通しを合成することで，表3の結果よりもシャープ・レシオが改善している．シャープ・レシオの水準も1を上回っており良好なパフォーマンスであることを確認できた．なお，合計収益率に注目するとベンチマークであるEQ_BLとSR_BLが良好な結果であるが，多くの先行研究同様に，リスク1単位あたりの運用効率である年率シャープ・レシオを重視する．本研究では資産配分を対象としており，分散効果を意図し様々なリスク水準の資産を組み入れるため，シャープ・レシオで評価すること，および合計収益は先物やレバレッジ性のあるETF等で容易に調整可能であるからである．

表6を見ると，リスクベース・ポートフォリオはおおむね株式と債券を2対8の割合で組み入れられており，EQ_BLとSR_BLは半分ずつのウェイトとなっている．

5．まとめ

リスクベース・ポートフォリオは，期待リターンを明示的には考慮しないため，ブラック・リッターマン法のように投資家の見通しをポートフォリオに反映することができない．一方で，ブラック・リッターマン法はCAPMを前提としているため，時価総額加重ポートフォリオが効率的でないならば，そこから算出されるインプライド・期待リターンも妥当性を失う．

そこで本研究では，両者を組み合わせることで，互いの欠点を補完する．すなわち，まずリスクベースのポートフォリオ構築手法によってウェイトを計算し，当該リスクベース・ポートフォリオのウェイトから，インプライド・期待リターンを導出する．そして，その期待リターン，および分散－共分散行列に投資家の見通しをブラック・リッターマン法に基づき合成する．最後に合成した期待リターンと分散－共分散行列を用いて，平均分散法に基づくポートフォリオ最適化を行う手法を提案した．

本手法は，ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張と言える．提案手法を用いることで，CAPMの時価総額加重型よりも良いインプライド期待リターンをベースに投資家の見通しを織り込むことが期待できる．加えて，ブラック・リッターマン法により，実証的に効率的であるとされるが，期待リターンの水準を考慮できないリスクベース・ポートフォリオに期待リターンと見通しを考慮した柔軟なポートフォリオが構築できる．

資産配分を例とした実証分析の結果，リスクベース･ポートフォリオから算定したインプライド･期待リターン，および見通しを合成したポートフォリオは良好なパフォーマンスであった．分析では複数のリスクベース・ポートフォリオのインプライド・期待リターンを検証したが，実際には，算出したインプライド・期待リターンを眺めてみて，最も投資家の直観に合うものを選択する．もし自身の見通しに自信がなければ，当該インプライド・期待リターンをそのまま使用してポートフォリオを構築すると良い．その場合でも，実証分析の結果から従来ベンチマークとして使用されてきたような時価総額加重ウェイトや等ウェイトよりも良いパフォーマンスが期待できる．もし自身の見通しをそれに合成したい場合には組み合わせることでパフォーマンスの改善が見込める．以上から，提案手法は，機関投資家はもちろん，個人投資家にとっても有効な手法であると言える．また，今回は見通しとして各資産の単純なモメンタムを使用したが，より良い各資産に対する見通しがあれば更なるパフォーマンスの向上が期待できる．加えてリスクベース・ポートフォリオは，リスク水準を設定することができないが，本手法を用いることで，投資家が目標とするリスク水準を設定したリスクベース・ポートフォリオを構築することできる．

参考文献

浅野晳・中村二朗（2009）『計量経済学』有斐閣．

Asness, C, S. Moskowitz, T, J., and Pedersen, L, H. (2013), “Value and Momentum Everywhere”, *The Journal of Finance*, Vol.68, No.3, pp.929-985.

Baitinger, E. Dragosch, A., and Topalova, A. (2017), “Extending the Risk Parity Approach to Higher Moments: Is There Any Value Added?,” *The Journal of Portfolio Management* Vol.43, No.2, pp.24-36.

Black, F. and Litterman, R. (1992), “Global Portfolio Optimization,” *Financial Analysts Journal*, Vol.48, No.5, pp.28-43.

Blamont, D. and Firoozye, N. (2003), “Bayesian Asset Allocation:Black-Litterman,” *Global Markets Research: Fixed Income Weekly*, pp.99-106.

Chaves, D. Hsu, J. Li, F., and Shakernia, O. (2011), "Risk Parity Portfolio vs. Other Asset Allocation Heuristic Portfolios," *Journal of Investing*, Vol.20, No.1, pp.108-118.

Choueifaty, Y. and Coignard, Y. (2008), "Toward Maximum Diversification," *Journal of Portfolio Management*, Vol.35, No.1, pp.40-51.

Clarke, R. De Silva, H., and Thorley, S. (2006), "Minimum-Variance Portfolios in the US Equity Market," *Journal of Portfolio Management*, Vol.33, No.1, pp.10-24.

De Carvalho, R, L. Lu,X., and Moulin, P. (2012), "Demystifying Equity Risk-Based Strategies: A Simple Alpha Plus Beta Description," *Journal of Portfolio Management*, Vol.38, No.3, pp.56-70.

De Jong, M. and Stagnol, L. (2016), "A Fundamental Bond Index Including Solvency Criteria," *Journal of Asset Management*, Vol.17, No.4, pp.280-294.

Fama, E, F. and French, K, R. (2004), "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence," *Journal of Economic Perspectives*, Vol.18, No.3, pp.25-46.

Lee, W. (2011), "Risk-Based Asset Allocation: A New Answer to an Old Question?" *Journal of Portfolio Management*, Vol.37, No.4, pp.11-28.

Maillard, S. Roncalli, T., and Teiletche, J. (2010), "The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios," *The Journal of Portfolio Management*, Vol.36, No.4, pp.60-70.

Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection," *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1, pp.77-91.

Meucci, A. (2005), "Beyond Black-Litterman: Views on Non-Normal Markets," *Working Paper*.

Michaud, R, O. (1989), "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?" *Financial Analysts Journal*, Vol.45, No.1, pp.31-42.

Moskowitz, T, J. Ooi, Y, H., and Pedersen, L, H. (2012), "Time Series Momentum," *Journal of Financial Economics*, Vol.104, No.2, pp.228-250.

中川慧（2017）「リスクベース・ポートフォリオの高次モーメントへの拡張」『リスク管理・保険とヘッジ（ジャフィー・ジャーナル）』: 49-71.

Nakagawa, K. Imamura, M., and Yoshida, K. (2018), "Risk-Based Portfolios with Large Dynamic Covariance Matrices," *International Journal of Financial Studies*, Vol.6, No.2, pp.1-14.

大森孝造・矢野学（2013）「リスクに基づくポートフォリオとアクティブ運用（特集 スマートベータ）」『証券アナリストジャーナル』51(11): 17-26.

Qian, E. (2005), "Risk Parity Portfolios: Efficient Portfolios through True Diversification," *Panagora Asset Management*.

Roll, R. (1977), "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory," *Journal of Financial Economics*, Vol.4, No.2, pp.129-176.

Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000), "A Demystification of the Black?Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction," *Journal of Asset Management*, Vol.1, No.2, pp.138-150.

Sharpe, W, F. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *The Journal of Finance*, Vol.19, No.3, pp.425-442.

竹原均（2012）「市場効率性の再検証: 株式市場の特性変化と予測可能性」『現代ファイナンス』(31): 3-17.

山田徹・上崎勲（2009）「低ボラティリティ株式運用」『証券アナリストジャーナル』47(6): 97-110.