

論 文

日本株式市場における個別銘柄変動性の有効性の検証¹

Idiosyncratic Volatility and the Cross Section of Expected Return in Japanese Stock Market

－ハンセン・ジャガナサン距離によるファクター・モデルの評価－

Assessing the Factor Models Using Hansen-Jagannathan Distance

みずほ年金研究所 菅原 周一²/Shuichi SUGAWARA
みずほ信託銀行 資産運用研究所 片岡 淳³/Jun KATAOKA

キーワード (Key Words)

個別銘柄変動性, ハンセン・ジャガナサン距離, ファクター・モデル
(Idiosyncratic Volatility), (Hansen-Jagannathan Distance), (Factor Model)

〈要 約〉

株式のリターンを説明するファクター・モデルとして、Fama and French (1993) が示した3ファクター・モデルは実証研究の結果から強い支持が得られているが、新たなファクター候補としてモメンタムあるいはリバーサルに関するファクターや流動性に関するファクターなども株式リターンを説明するファクターとして有効性が報告されている。これらのファクターに加えて、個別銘柄変動性 (Idiosyncratic Volatility, 以下IdVolと略記) と呼ばれるファクターがリターンを説明するファクターとして、米国市場を中心として盛んに議論されている。本研究ではこの個別銘柄変動性 (以下IdVol) に着目し、IdVolファクターの有効性の確認を行い、この変数をファクター・モデルに組み込んだ場合の評価をハンセン・ジャガナサン距離 (以下HJ距離) を用いて行った。その結果、IdVolをファクターとして組み込んだ2つのモデルが、Fama and French (1993) の3ファクター・モデルよりも真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデル群に近いことを確認した。なお、HJ距離は、真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデル群に提案モデルがどの程度近いかの評価を行う尺度であり、2つのモデルのHJ距離に有意な差があるかどうかを評価するものではないため、Kan and Robotti (2009) に従い2つのモデル間のHJ距離に有意な差があるかどうかの検討を行った。その結果、市場、簿価時価比率、IdVolからなる3ファクター・モデルと市場、規模、IdVolからなる3ファクター・モデルが有効なモデルであり、両モデルのHJ距離に有意な差がないこと、これらのモデルのファクターにIdVolが含まれていることが確認された。

1. はじめに

株式のリターンを説明するファクター・モデルとして、Fama and French (1993) が示した3ファクター・モデルは、米国市場を中心とした実証研究の結果から、強い支持が得られている。一方で、Fama and French (1993) が示した市場、規模、簿価時価比率という3つのファクター以外の新たなファクター候補として、モメンタムあるいはリバーサルに関するファクターや流

動性に関するファクターなども株式リターンを説明するファクターとして有効性が報告されている。これらのファクターに加えて、個別銘柄変動性 (Idiosyncratic Volatility, 以下IdVolと略記) と呼ばれるファクターがリターンを説明するファクターとして注目されている。このファクターは、銘柄固有のリスクの大きさを測る尺度であり、ファクター・モデルの残差の変動性の大きさから算出される。

¹ 本論文の内容は、筆者個人に属するものであり、所属する会社の公式見解を示すものではない。また本論文に含まれる誤りは全て筆者の責に帰するものである。

² 〒100-8240 東京都千代田区丸の内1-6-1, TEL: 03-3240-8018, Email: sugawara@mizuho-pri.co.jp

³ 〒100-8240 東京都千代田区丸の内1-6-1, TEL: 03-3240-8018, e-mail: jun.kataoka@mizuho-tb.co.jp

IdVolの日本市場での有効性が確認されると、例えば、個人の資産運用を考える上で重要な役割を担っている株式投資信託のリターンを説明するファクターとしてIdVolを含めることで、より厳格なリスク管理が期待される。また、アクティブ・ファンドのファクターの1つとして、IdVolを含めることで、より高いアクティブ・リターンが期待できることになる。

このファクターの考え方自体は、すでに実務で利用されているファクターであり、新しいものではないが、近年、IdVolとその後の株式リターンとの関係について盛んに議論されている。IdVolが低い銘柄ほどその後のリターンが高いという傾向が主に米国で報告されている。

2. 先行研究

Teoh et al. (2006) はIdVolが大きな企業ほど実績利益の変動が大きく、将来利益の予測が難しいことを報告している。IdVolとその後のリターンの関係については、Ang et al. (2006) が行った研究がある。Ang et al. はIdVolの大小により5分位ポートフォリオを作成し、各分位ポートフォリオの特徴を分析した。その結果、過去のIdVolが低いほどその後のリターンが高くリスクは低く、企業規模は大きい傾向が見られたと報告している。さらにAng et al. (2009) は、過去のIdVolとその後のリターンの関係を、先進23カ国を対象にFama-MacBeth回帰によって調べたところ、IdVolが高かった銘柄群はその後の平均リターンが低く、その傾向は特にG7各国で顕著に表れることを示した。また米国市場においてこれらの因果関係の要因を調べた結果、売買コスト、情報の浸透度、及びモーメントの差によるものと結論付けている。

一方Fu (2009) はIdVolが時間によって変動することに着目し、EGARCHモデルによりIdVolの期待値を求めてリターンの期待値との関係を比較したところ、有意な正の相関関係があることを見出した。さらにHuang et al. (2010) は過去のIdVolと事後的リターンとの負の相関にはリターン・リバーサルが混在していることを指摘し、Fuの方法に従いEGARCHにより来期の条件付期待IdVolを求め、それと来期のリターンとの関係を調べたところ正の相関関係があると指摘している。

わが国では山田・上田 (2009) 及び石部ら (2009) による同様の研究がある。これらの研究ではボラティリティ指標としてIdVolではなくリターンのボラティリティそのものが用いられている。山田・上田 (2009) では、過去のボラティリティに

より分位ポートフォリオを作成して事後的なリターンを計測したところ、ボラティリティが低いほうが事後的なリターンが高いことを報告している。石部ら (2009) も分位ポートフォリオにより同様の結果を得ている。

なお、久保田・竹原 (2007) は、HJ距離を使い、日本株式市場におけるFama and French (1993) の3ファクター・モデルの有効性の検証を行っている。彼らの分析結果によると、HJ距離を基準として評価すると、全期間 (1977年9月から2006年8月まで) ではCAPMと比較して実際の株式リターンをよりよく説明しているものの、Fama and French (1993) の3ファクター・モデルは棄却されること、そして、棄却される原因がSMBファクターの不安定性にあることを示した。なお、期間を分割して、バブルの前と後の2つに分けて分析をすると、バブル前ではモデルの係数の符号条件を満たし (ただし、SMBの係数は有意でない)、HJ距離は5%有意水準で棄却されないという結果を報告している。これらの結果のみでは、SMBの有効性は否定されるが、主成分分析の結果から、少なくともSMBファクターはリスク・ファクター構造と何らかの関係があることを示し、SMBファクターが不要であるとする考え方は妥当でないとしている。本分析でも、この結果を受けて、全期間での分析と期間を半分に分けた分析を行うこととする。

3. ハンセン・ジャガナサン距離

本論文では、IdVolの大小によるリターンの差異を詳しく調べる方法としてKan and Robotti (2008) に従い、確率割引ファクター (以下SDF) およびハンセン・ジャガナサン (以下HJ) 距離に基づく分析を行う。以下ではこれらの方法論について説明する。

3.1 ハンセン・ジャガナサン距離とは

y を提案するSDFとし、 \mathbf{r} を N 個のポートフォリオの超過リターンとする。もし y が N 個のポートフォリオを正確に価格付けできる場合、価格付けの誤差は以下ようになる。

$$\mathbf{e} \equiv E[\mathbf{r}y] = \mathbf{0}_N$$

ただし、 $\mathbf{0}_N$ は N 個の要素がすべて0のベクトルである。もし y に特定化の誤りがある場合、価格付けの誤差は0とはならない。すなわち、 y のパラメータを $\boldsymbol{\lambda}$ とすると、

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv E[\mathbf{r}y(\boldsymbol{\lambda})] \neq \mathbf{0}_N$$

である。そこで、誤差の度合いを示す指標として

以下のように誤差の2次形式を考える。

$$Q_W = \min_{\lambda} e(\lambda)' W e(\lambda)$$

Hansen and Jagannathan (1997) は重み付け行列 W として \mathbf{r} の2次モーメントの逆行列 $(E[\mathbf{r}\mathbf{r}'])^{-1}$ を考えた。そしてHJ距離として知られている以下の定義式を導いた。

$$\delta_{HJ} = Q_{U^{-1}}^{1/2} = \left[\min_{\lambda} e(\lambda)' W^{-1} e(\lambda) \right]^{1/2}$$

Hansen and Jagannathan (1997) はHJ距離について「一物一価の条件を満たす許容可能なSDF m の集合と提案されたモデルのSDF y との最小自乗距離」を表すという解釈を与えている。

3.2 HJ距離と確率割引ファクターの推定方法

本論文では, Kan and Robotti (2008) に従い, 超過リターンベースでの確率割引ファクターを考える。Kan and Robottiが用いた「超過リターン」とは, 「平均値を超えるリターン」という意味であり, ファクターはすべて平均値を差し引いて (de-meaned) からSDFに用いられる。

さて, これらの設定の元で基準化された線形SDFを次式のように定める。

$$y_t(\lambda) = 1 - \lambda'(f_t - \mu_1)$$

ただし, λ は線形SDF y のパラメータである。ここで, \mathbf{r}_t を N 個の対象資産の t 時点における超過収益率ベクトルとすると, 価格評価誤差は次式で与えられる。

$$e(\lambda) = E[\mathbf{r}_t y_t(\lambda)] = \mu_2 - \mathbf{V}_{21} \lambda$$

ここで, $\mathbf{Y} = [\mathbf{f}', \mathbf{r}']$ とすると, Y の期待値と分散・共分散行列は以下のように表される。

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{Y}] \equiv \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \text{Var}[\mathbf{Y}] \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}$$

超過収益率を用いる場合, 2乗HJ距離は以下により与えられる。

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \min_{\lambda} e(\lambda)' \mathbf{V}_{22}^{-1} e(\lambda) \\ &= \boldsymbol{\mu}'_2 \mathbf{V}_{22}^{-1} \boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}'_2 \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21} (\mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21})^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \boldsymbol{\mu}_2 \end{aligned}$$

$e(\lambda)' \mathbf{V}_{22}^{-1} e(\lambda)$ を最小にする λ は次式で与えられる。

$$\lambda = (\mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{21})^{-1} (\mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \boldsymbol{\mu}_2)$$

従って, 最小2乗HJ距離 δ^2 と λ の推定値は次式

で与えられる。

$$\hat{\lambda} = (\hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{21})^{-1} (\hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_2)$$

$$\hat{\delta}^2 = \hat{\boldsymbol{\mu}}'_2 \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 - \hat{\boldsymbol{\mu}}'_2 \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{21} (\hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{21})^{-1} \hat{\mathbf{V}}_{12} \hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_2$$

4. ハンセン・ジャガナサン距離による実証分析

わが国では, IdVolはすでに実用モデルの中にファクターとして組み込まれた例がある⁴。しかしながら, IdVolとその事後的なりターンに関しては, 前述のAng, et al. (2009) の分析対象国の一つとして検証された以外では実証分析が十分でないと考えられる。また, Ang, et al. (2009) の方法ではFama and MacBeth (1973) による回帰が用いられているが, ファイナンスの実証研究で標準的な評価尺度となっているHJ距離を利用すべきであると考えられる。

このため本論文では, HJ距離に基づく実証分析により, IdVolと事後的なりターンについて基礎的な検証を行う⁵。特にIdVolを株価の変動要因を説明するリスク・ファクターとして考えた場合, そのリスクを取るによりプレミアムが得られるのかという観点と, 他のいくつかのファクターと組み合わせてアセットプライシングモデルとしてみた場合に真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデル群にどの程度近いかという二つの観点からの検証を同時に行なう。

表1 各ファクターリターンの基本統計量及びファクター間の相関係数

	VW	SMB	HML	IdVol
平均	0.152	0.002	0.628	0.465
標準偏差	5.421	3.567	3.137	3.418
歪度	-0.134	-0.377	-0.101	-0.287
尖度	1.183	1.015	2.469	0.645
	VW	SMB	HML	IdVol
VW	1			
SMB	-0.096	1		
HML	-0.218	0.163	1	
IdVol	-0.467	-0.339	0.172	1

⁴ MSCI Barraや日経ポートフォリオマスターなどにファクターとして採用されている。もっとも, 本論文で作成したIdVolファクターとこれら商用モデルのIdVolファクターは必ずしも一致しない。日経ポートフォリオマスターの「変動性」ファクターと本論文におけるIdVolファクターを比較したところ, 相関係数は0.17であった。

⁵ Fu (2009) およびそれに続くHuang et al. (2010) などで採用されているEGARCHによる分析についても参考すべきと考えたが, まず第一にAng, et al. (2009) の主張するような関係がわが国株式市場に存在するかどうかを検証すべきと考えた。

4.1 実証分析

4.1.1 データ

使用したデータは、期間：1980年9月～2010年7月の東証1部および2部の月次個別銘柄リターン（359Obs.）、B/P及び時価総額である。また、分析は個別銘柄ではできないことから、先行研究に従い分析対象銘柄をポートフォリオ法により、グループ分けしている。先行研究の多くは、時価総額とB/Pの2つのファクターを使い5分位×5分位の25個のグループ分けしているが、2つのファクターのみを使ったグループ分けには問題があるとの指摘があるため、5つのファクターを使った2（規模）×2（B/P）×2（流動性）×2（個別銘柄変動性）×2（モメンタム）の32個のグループ分けを行い、分析対象とした。これら32個のポート

フォリオの基本統計量を表2に示す。

4.1.2 IdVolの作成方法

まず、市場全体の平均的なリターンを表すファクターとして時価総額ウェイトのリターンを求めた。このファクターをVWとする。また、Fama-French（1993）の方法に従って東証1部および2部のリターンデータからSMB及びHMLのファクターリターンを求めた。

次に、個別銘柄のリターンを、VW, SMB, HMLの3ファクターのリターンで回帰して残差を求めた。すなわち、 t 期のIdVolを求めるために以下の重回帰式：

$$r_{i,t} = \alpha + \beta_1 VW_t + \beta_2 SMB_t + \beta_3 HML_t + \varepsilon_{i,t}$$

表2 32個のポートフォリオの基本統計量

	SIZE	B/P	LIQ	IdVol	LM36	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値
Port1	L	H	H	H	H	0.633	7.343	0.428	2.71	38.958	-24.554
Port2	L	H	H	H	L	0.521	6.22	0.226	2.178	26.776	-22.885
Port3	L	H	H	L	H	0.537	8.724	0.604	2.501	47.269	-25.148
Port4	L	H	H	L	L	0.075	7.368	0.316	1.617	32.785	-23.264
Port5	L	H	L	H	H	0.724	7.508	0.128	1.335	30.984	-25.559
Port6	L	H	L	H	L	0.295	6.447	-0.006	0.989	24.284	-24.149
Port7	L	H	L	L	H	0.125	8.867	0.299	1.246	37.368	-24.951
Port8	L	H	L	L	L	-0.443	7.467	0.041	0.808	27.694	-22.691
Port9	L	L	H	H	H	0.693	6.719	0.454	1.733	29.238	-18.881
Port10	L	L	H	H	L	0.777	5.795	0.112	1.016	20.267	-20.6
Port11	L	L	H	L	H	0.767	8.235	0.498	1.314	35.937	-22.192
Port12	L	L	H	L	L	0.608	6.974	0.242	1.222	27.922	-19.637
Port13	L	L	L	H	H	0.81	7.197	0.385	2.311	35.4	-22.281
Port14	L	L	L	H	L	0.593	6.14	-0.032	1.266	22.022	-23.668
Port15	L	L	L	L	H	0.635	8.922	0.493	1.702	42.068	-25.856
Port16	L	L	L	L	L	0.203	6.95	0.053	0.728	24.359	-22.684
Port17	S	H	H	H	H	0.265	5.783	0.058	1.636	21.654	-24.756
Port18	S	H	H	H	L	0.274	5.869	1.014	4.852	31.536	-18.901
Port19	S	H	H	L	H	0.052	7.173	0.143	0.786	24.621	-21.924
Port20	S	H	H	L	L	0.055	6.647	0.214	0.703	23.353	-20.728
Port21	S	H	L	H	H	0.105	5.756	0.466	2.429	27.553	-20.529
Port22	S	H	L	H	L	0.041	6.224	0.018	1.322	23.961	-22.126
Port23	S	H	L	L	H	-0.032	6.905	-0.111	1.791	23.091	-30.523
Port24	S	H	L	L	L	-0.129	7.083	-0.22	1.084	21.474	-28.467
Port25	S	L	H	H	H	0.458	5.442	0.271	1.914	22.246	-19.606
Port26	S	L	H	H	L	0.468	4.633	0.277	2.673	24.442	-19.613
Port27	S	L	H	L	H	0.54	7.187	0.521	2.43	34.755	-22.776
Port28	S	L	H	L	L	0.402	5.958	0.12	1.372	24.684	-22.317
Port29	S	L	L	H	H	0.665	5.764	0.122	1.337	19.961	-19.687
Port30	S	L	L	H	L	0.513	5.062	-0.075	0.836	18.353	-16.724
Port31	S	L	L	L	H	0.488	7.859	0.211	1.285	31.048	-25.45
Port32	S	L	L	L	L	0.267	6.434	-0.15	0.944	20.655	-26.44

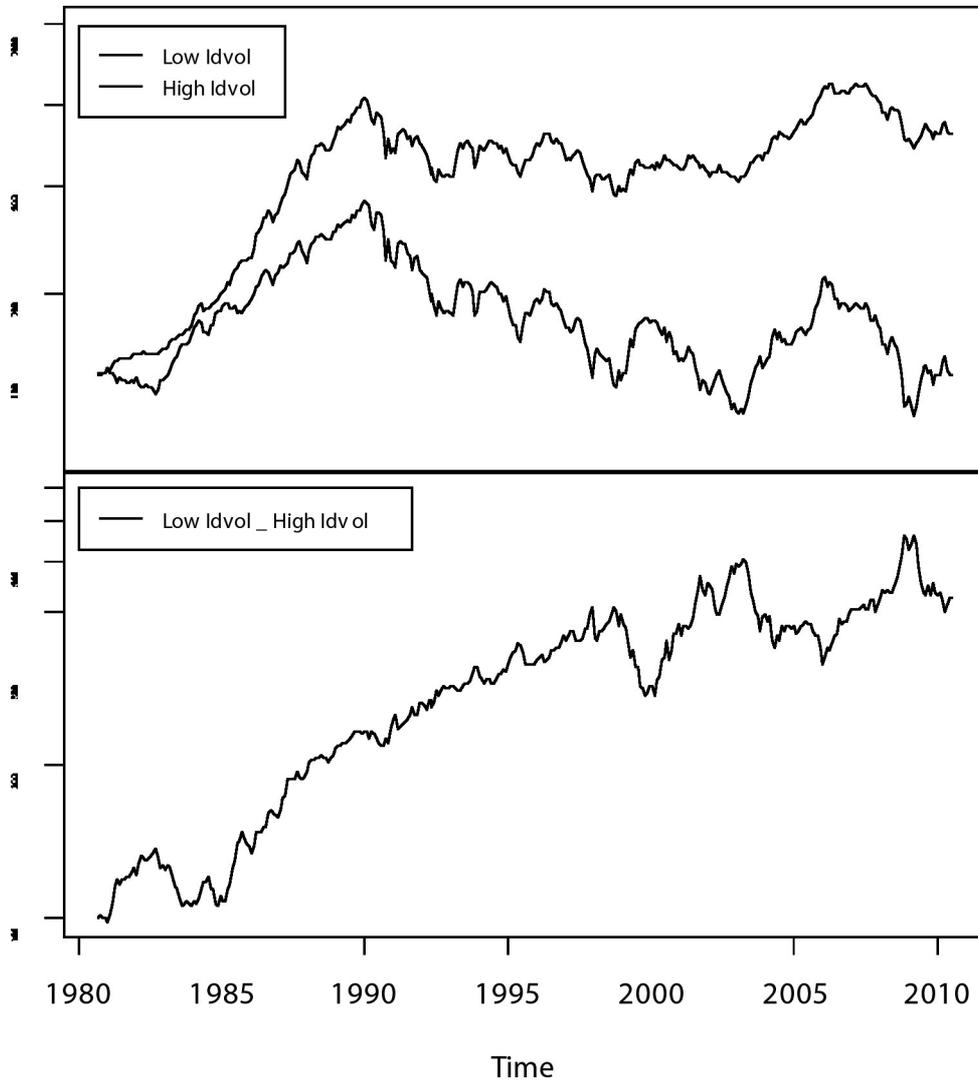


図1 高・低IdVolポートフォリオの及びIdVolファクターの累積リターン

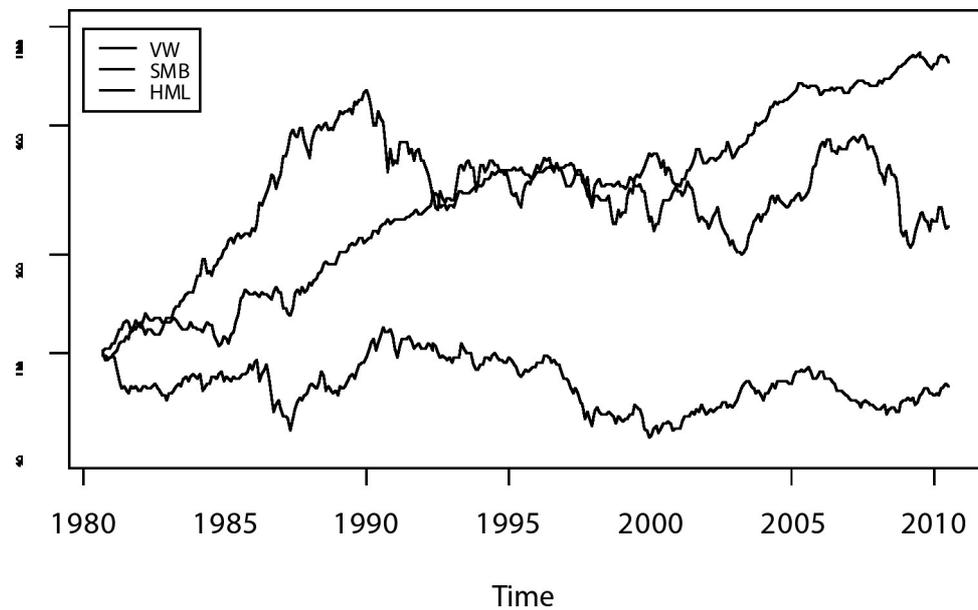


図2 VW, SMB, HMLの各ファクターの累積リターン

を時点より $t-1$ 時点から $t-36$ 時点までのデータで推定して $\varepsilon_{i,t}$ の系列を求めた。そして得られた標準偏差を $\varepsilon_{i,t}$ 期の IdVol とした。

4.1.3 IdVolファクターリターンの特徴

ファクターリターンの作成方法はFama-French (1993) の方法に従った。すなわち、東証1部および2部銘柄を時価総額でソートし、メディアンで分割して2つの銘柄群を作成した。次に、各銘柄群の中でIdVolの大きさを銘柄をソートし、30パーセントおよび70パーセントで3分割した。これにより、時価総額で大型株及び小型株、それに横断する形で高IdVol株、中間領域、および低IdVolに3分割する。そして、低IdVol株ポートフォリオの時価加重平均リターンから高IdVolポートフォリオの時価加重平均リターンを差し引くことにより、IdVolファクターを得た。図1上段に高IdVol株及び低IdVol株の時価加重平均リターンを累積した図を示す。また図1の下段に上記の方法により計算されたIdVolファクターの累積リターンを示す。また図2には東京1部および2部に上場している銘柄を対象にFama and French (1993) の方法により求めたSMB及びHMLの累積ファクターリターンを示す。図2には市場全体の動向を示す時価加重平均ファクターVWの累積リターンもプロットしている。

図1上段から、明らかに低IdVolのポートフォリオが高IdVolのポートフォリオよりも累積リターンが高いことが分かる。

そこで、IdVolファクターリターンを累積した図1下段を見ると、1998年まではほぼ一貫して右上がりであることから、この期間のファクターリターンはほとんどプラスであったことが分かる。ところが、2000年及び2007年をボトムとして累積リターンが下落する局面が見られる。

4.1.4 分位ポートフォリオによるIdVolファクターの評価

表3の上段に、1980年9月から2010年7月までの期間のデータを使い、IdVolファクターの大きさを構築した5分位ポートフォリオのリターンとリスクを示す。また、表2の中段と下段に、分析期間を前半（1980年9月から1994年8月まで）と後半（1994年9月から2010年7月まで）に半分期間分割した場合のIdVolファクターの大きさを構築した5分位ポートフォリオのリターンとリスクを示す。これらの結果を見ると、全期間で見ても分割した期間で見ても、IdVolの値が高いとリターンが大きくリスクが小さく、IdVolの値が小さいとリターンが大きくなるのが分かる。

これらのことから、IdVolはそのファクターにベットすることにより一定のプレミアムが期待されるが、近年ではそのプレミアムが安定的ではないこと、またそのことからリスク・ファクターとしての性質をもつ可能性があることがわかる。

そこで、次節ではアセットプライシングモデルの評価手法として標準的手法となりつつあるHJ距離を用いて、IdVolのプレミアムとリスク特性について分析する。

4.2 ハンセン・ジャガナサン距離によるプレミアムの分析

4.2.1 HJ距離によるファクター・モデルの評価

本論文では、Hansen and Jagannathan (1997)、Jagannathan and Wang (1996) およびKan and Robotti (2008) が示したHJ距離とSDF係数の推定と検定手法に従った。この方法に従った場合のSDFをFama and French (1993) の3ファクターモデルで例示すると式(1)のようになる。この式から明らかのように、プレミアムが正の場合に期待される λ の符号条件は正である。

表3 5分位ポートフォリオの月次平均リターンと標準偏差

全期間	分位1	分位2	分位3	分位4	分位5
平均	0.684	0.545	0.316	0.125	0.127
標準偏差	4.440	5.586	6.132	6.977	8.482
前半	分位1	分位2	分位3	分位4	分位5
平均	1.171	1.032	0.757	0.710	0.484
標準偏差	5.106	5.974	6.264	6.914	7.464
後半	分位1	分位2	分位3	分位4	分位5
平均	0.194	0.055	-0.126	-0.463	-0.231
標準偏差	3.599	5.137	5.981	7.010	9.403

注) 上段は全期間（1980年9月～2010年7月）での分析結果、中段は前半（1980年9月～1994年8月）での分析結果、下段は後半（1994年9月～2010年7月）での分析結果を示している。

表4 ファクター・モデルのパラメータ推定結果とHJ距離（全期間）

Model	HJ距離						SDF係数				各SDF係数のt値			
	DJ距離	標準誤差	標準誤差 (カイ2乗)	p値	25%CI	97.5%CI	VW	SMB	HML	IdVol	VW	SMB	HML	IdVol
1	0.433	0.047	0.044	0.002	0.525	0.340	0.50				0.51			
2	0.405	0.044	0.044	0.007	0.490	0.319	2.13			5.42	1.89			2.94
3	0.376	0.042	0.046	0.046	0.458	0.294	1.44		7.51		1.43		4.15	
4	0.432	0.047	0.044	0.001	0.524	0.340	0.54	0.77			0.55	0.50		
5*	0.349	0.038	0.045	0.079	0.424	0.275	2.86		7.15	4.90	2.52		3.94	2.64
6*	0.389	0.043	0.044	0.009	0.472	0.306	2.97	3.66		7.50	2.50	2.12		3.62
7	0.375	0.042	0.046	0.037	0.457	0.293	1.42	-0.66	7.68		1.41	-0.42	4.14	
8	0.345	0.038	0.045	0.081	0.419	0.271	3.23	1.86	6.57	6.00	2.72	1.02	3.44	2.81

注) CIは信頼区間を表す。

$$y_t = 1 - \lambda_{VW} r_t^{VW} - \lambda_{SMB} r_t^{SMB} - \lambda_{HML} r_t^{HML} \quad (1)$$

ただし、 $r_t^{VW}, r_t^{SMB}, r_t^{HML}$ は各々VW, SMB, HMLの各ファクターリターンである。

分析結果を表4に示す。この結果を見ると、5%有意水準でt値がすべて有意なモデルは、VW, HML, IdVolの3ファクターで構成されるModel 5と、VW, SMB, IdVolの3ファクターで構成されるModel 6の2つとなった。なお、HJ距離はModel 5が0.349で最小であることから真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデル群に近い。ファクターとしては、VW, SMB, HML, IdVolの4つのファクターのうちいずれかがモデルのファクターとして採用される結果となった。しかしこれら4つのファクターを同時に組み込んだModel 8はt値でみて有意でないファクターが存在するため、有効なモデルと評価することができなかった。

統計的に有意なモデルと評価されたModel 5とModel 6のモデルには、VWファクター以外に共通ファクターとしてIdVolが含まれている。このため、わが国株式市場においては、IdVolはファーマ・フレンチが示したSMBやHML以上に有効なファクターである可能性が高い。HJ距離からの視点からも、IdVolの有効性が確認された。

4.2.2 期間分割による安定性の評価

期間の安定性を確認するために、期間を半分に分割（観測データ数が、ほぼ等しくなるように分割）した場合の結果を表5に示す。前半の結果を見ると、5%有意水準でt値がすべて有意なモデルは、4つに増えているが、逆に後半では、統計的に有意なモデルはなくなってしまうという結果となった。

Fama and French (1993) の3ファクターモデ

ル (Model 7) は、前半の分析でSMBの符号条件は満たすようになったが、t値では有意となっていない。これは、久保田・竹原 (2007) の分析と一致する結果である。後半に関しては、Fama and French (1993) の3ファクターモデル (Model 7) は有効なモデルではないという結果となったが、これも久保田・竹原 (2007) の分析と一致する結果がある。

一方で、前半の期間では、VW, SMB, HML, IdVolの4ファクターで構成されるモデル8のHJ距離が最短で、次にVW, SMB, IdVolの3ファクターで構成されるModel 6、そして全期間の分析でHJ距離が最短となったVW, HML, IdVolの3ファクターで構成されるModel 5という順番で距離が最短となった。ただし、後半に関しては、有効なモデルは1つも存在しないという結果となった。期間安定性については、問題の残る結果となった。

なお、今回の分析では、分析対象銘柄をポートフォリオ法により、32個のポートフォリオにグループ分けしている。一方、HJ距離による分析では、分析対象ポートフォリオの10倍程度の観測データ数とすることが推奨されている (Cochrane (2005))。今回の32ポートフォリオの場合、期間分割をするとデータ数が不足することになり、分析結果の信頼性は必ずしも高くない可能性があることには注意が必要である。

以上の分析から、期間安定性の問題はあるものの、HMLと同様にHJ距離からの視点からも、IdVolの有効性が示されたと言えるであろう。なお、これまでの全期間の分析結果から、真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデルに最も近いモデルはModel 5、2番目に近いモデルはModel 6であることが確認されたが、両者のHJ距

表5 ファクター・モデルのパラメータ推定結果とHJ距離（期間分割）

Model	HJ距離						SDF係数				各SDF係数のt値			
	HJ距離	標準誤差	標準誤差 (カイ2乗)	p値	2.5%CI	97.5%CI	VW	SMB	HML	IdVol	VW	SMB	HML	IdVol
1	0.509	0.077	0.069	0.067	0.660	0.357	1.26			0.00	0.97			
2	0.452	0.068	0.068	0.189	0.585	0.319	2.28			9.36	1.71			3.21
3*	0.434	0.069	0.071	0.312	0.570	0.298	3.15		9.80	0.00	2.27		3.67	
4	0.505	0.077	0.067	0.058	0.656	0.354	1.45	1.52		0.00	1.10	0.80		
5*	0.405	0.064	0.068	0.410	0.529	0.280	3.49		7.84	6.65	2.50		2.74	2.13
6*	0.400	0.063	0.069	0.418	0.523	0.278	3.59	6.27		14.42	2.57	2.87		4.32
7	0.432	0.069	0.071	0.290	0.567	0.297	3.26	1.12	9.71	0.00	2.33	0.59	3.63	
8*	0.372	0.058	0.070	0.564	0.486	0.257	4.26	5.00	6.04	11.30	2.98	2.18	2.01	3.02

Model	HJ距離						SDF係数				各SDF係数のt値			
	HJ距離	標準誤差	標準誤差 (カイ2乗)	p値	2.5%CI	97.5%CI	VW	SMB	HML	IdVol	VW	SMB	HML	IdVol
1	0.511	0.083	0.071	0.097	0.674	0.347	-0.37				-0.25			
2	0.506	0.082	0.070	0.093	0.666	0.346	1.00			2.51	0.48			0.92
3	0.484	0.079	0.073	0.162	0.640	0.328	-0.13		5.39		-0.09		2.20	
4	0.511	0.083	0.070	0.082	0.674	0.347	-0.37	-0.23			-0.25	-0.09		
5	0.479	0.077	0.072	0.171	0.630	0.328	1.32		5.45	2.64	0.63		2.22	0.97
6	0.506	0.082	0.069	0.075	0.665	0.346	1.18	0.84		2.86	0.54	0.30		0.96
7	0.478	0.078	0.073	0.174	0.631	0.325	-0.03	-2.76	6.41		-0.02	-0.99	2.42	
8	0.476	0.077	0.073	0.158	0.627	0.326	0.95	-1.98	6.16	1.82	0.43	-0.65	2.29	0.60

注) 上段は前半（1980年9月～1994年8月）での分析結果，下段は後半（1994年9月～2010年7月）での分析結果を示している。

表6 最適モデル（Model 5）とそれ以外のモデルとのHJ距離の比較

Model		$\hat{\delta}^2$	Diff	p値
5		0.122		
1	Nested	0.187	0.065	0.000
2	Nested	0.164	0.042	0.280
3	Nested	0.141	0.019	0.154
4	Non-nested	0.187	0.065	0.019
6	Non-nested	0.151	0.029	0.190
7	Non-nested	0.141	0.019	0.184
8	Nested	0.119	0.003	0.640

注) $\hat{\delta}^2$: 2乗HJ距離, |Diff|: 2乗HJ距離の差, p-val: p値

離の差は小さい。また、統計的に有意でないモデルのHJ距離を含めても、HJ距離は最小で0.345、最大で0.433と大きな差がないことがわかる。HJ距離は、複数あるモデルのどのモデルが最良であるかを示すわけではないので、次節では、モデル間のHJ距離に有意な差があるかどうかを検討することとする。

4.3 ファクター・モデル間のHJ距離の差の評価

Kan and Robotti (2009) に従い、ファクター・

モデル間のHJ距離の差異を評価した結果（モデル間比較）を表6に示す。モデル間の比較はModel 5を基準として、他のモデルとHJ距離で評価して有意な差があるかどうかの検討を行った。表6のNested, Non-Nestedの表示は、2つのモデル間に包含関係があるかどうかを示している⁶。結果を見ると、Model 1 (VW), Model 2 (VW, IdVol), Model 4 (VW, SMB) の3つは、Model 5と比較して統計的に有意な違いがあることが確認された。その他のモデルは、Model 5と比較して統計的には有意な差がないという結論となった。Model 5とModel 3, 6, 7, 8は統計的に有意な差がなく、両者に明確な差異があるとは言えないことが確認された。しかし、前節の分析でSDF係数が有意なモデルはModel 5, 6の2つのモデルであるため、真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデルに最も近いモデルは、これら2つのモデルであると考えられ、両モデルに共通するファクターであるIdVolの有効性が確認された。一方、HMLとSMBはどちらか一方のモデルにだけ

⁶ 包含関係にあるモデルはNested, 包含関係にないモデルはNon-nestedと表示した。包含関係にあるか否かでモデル間のHJ距離の差の検定方法が異なるため示した。

しか組み込まれていない。HMLとSMBを比較（No5とNo6のモデルを比較）すると、HMLを組み込んだ No5 のモデルのHJ距離が短いため、HMLがより有効なファクターである可能性が高い。

これらのことから、IdVolが大きい銘柄群より小さい銘柄群のほうがその後のリターンが高いことが確認された。

5. おわりに

本論文では、個別銘柄変動性に着目し、過去のIdVolとその後のリターンの関係をHJ距離の枠組みで評価した。また複数のファクターを組み合わせた場合のモデル評価をHJ距離により分析した。この結果、IdVolをリスク・ファクターと考えた場合にプレミアムが有意に正となることから、過去IdVolが高かった銘柄群は、その後のリターンが低くなるという結果が得られた。また、他のファクターと組み合わせた場合、マーケット全体の変動を表すファクターと、B/Pに関連するファクター（HML）との組み合わせが真のモデルを含む一物一価の条件を満たすモデルに最も近いことが確認された。これらのことから、IdVolはリスク・ファクターとしても有効であるという結果が得られた。

今後は、IdVolの変数を算出するに際して、期待（予想）の要素を取り入れること、IdVol以外の株式期待リターンを説明するファクターの存在やIdVolとその他のファクターとの関連性などの分析を行うことが当面の課題として考えられる。

謝辞

本論文の執筆にあたり、有益かつ貴重なコメントをいただきました上智大学齊藤進教授に深謝いたします。また、本誌レフリー2名の方から大変貴重なご指摘を頂きました。ここに記して感謝いたします。

【参考文献】

- Ang, A., R.J. Hodrick, Y. Xing, and X. Zhang (2006), "The Cross-Section of Volatility and Expected Returns", *The Journal of Finance*, Vol 61, pp. 259-299
- Ang, A., R.J. Hodrick, Y. Xing, and X. Zhang (2009), "High Idiosyncratic Volatility and Low Returns: Internatinoal and furher U.S. Evidence", *Journal of Empirical Finance*, Vol 91, pp. 1-23.

- Cochrane, John. H., (2005), *Asset Pricing*, Princeton University Press, New Jersey.
- Fama, E. and French, K. (1993), "Common risk factors in the returns on stocks and bonds," *Journal of Financial Economics*, pp. 33, 3-56
- Fu, F. (2009), "Idiosyncratic risk and the cross-section of expected returns," *Journal of financial economics*, pp. 91, 24-37
- Hansen, L., J. Heaton, and E.G.J. Luttmer (1995), "Econometric Evaluation of Asset Pricing Models," *Review of Financial Studies*, 8(2), pp. 237-74
- Hansen, L.P. and R. Jagannathan (1997), "Assessing specification errors in stochastic discount factor models," *The Journal of Finance*, 52, pp. 557-590
- Huang W., Q. Liu, S.G. Rhee and L. Zhang (2010), "Return Reversals, Idiosyncratic Risk, and Expected Returns," *Review of Financial Studies*, 23, pp. 147-168.
- 石部真人, 角田康夫, 坂巻敏史 (2009) 「最小分散ポートフォリオとボラティリティ効果」『証券アナリストジャーナル』 47(12), 114-127
- Jagannathan, R. and Z. Wang (1996), "The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns," *The Journal of Finance*, Vol. 51, pp. 3-53
- Kan, R. and C. Robotti (2008), "Specification tests of asset pricing models using excess returns," *Journal of Empirical Finance*, 15, pp. 816-838
- Kan, R and C. Robotti (2009), "Model Comparison Using the Hansen-Jagannathan Distance," *Review of Financial Studies*, 22(9), pp. 3449-3490
- 久保田, 竹原 (2007) 「Fama-Frenchファクター・モデル有効性の再検証」『現代ファイナンス』 22, 3-23
- Toeh, S., H., Y. Yang, Y. Zhang (2006), "R-Square: Noise or Price Efficiency?" *working paper*, University of California, Irvine.
- 山田徹, 上田勲 (2009) 「低ボラティリティ株式運用」『証券アナリストジャーナル』 47(6), 97-110

Appendix

ハンセン・ジャガナサン距離によるモデル間の比較

Kan and Robotti (2009) は、2つの異なるモデルのHJ距離に有意な差が有るか否か（等価性）の検定をするための方法を示した。まず、比較対象となる2つのモデルを考える。モデル1のSDFは x_1 と線形関係にあり、 $y_1 = 1 - \eta'(x_1 - E[x_1])$ により与えられる。一方、モデル2のSDFは x_2 と線形関係にあり、 $y_2 = 1 - \lambda'(x_2 - E[x_2])$ により与えられる。ここで、 $x_1 = [f_1', f_2']$ 、 $x_2 = [f_1', f_3']$ とする。ただし、 f_1 、 f_2 、 f_3 は3つの異なったファクター集合であり、 f_i は $K_i \times 1$ 次元（ $i = 1, 2, 3$ ）である。また $D_1 = Cov[r, x_1']$ 、 $D_2 = Cov[r, x_2']$ とする。すると、2つのモデルの価格評価誤差とHJ距離は次式で与えられる。

$$e_i = \mu_2 - D_i(D_i'V_{22}^{-1}D_i)^{-1}D_i'V_{22}^{-1}\mu_2 \quad i=1,2$$

$$\delta_i^2 = \mu_2'V_{22}^{-1}\mu_2 - \mu_2'V_{22}^{-1}D_i(D_i'V_{22}^{-1}D_i)^{-1}D_i'V_{22}^{-1}\mu_2 \quad i=1,2$$

また、HJ距離を最小にするSDFは次式で表される。

$$\eta = (D_1'V_{22}^{-1}D_1)^{-1}(D_1'V_{22}^{-1}\mu_2)$$

$$\lambda = (D_2'V_{22}^{-1}D_2)^{-1}(D_2'V_{22}^{-1}\mu_2)$$

ここで、 $K_1 = 0$ の時、2つのモデルは共通のファクターを持たない（非ネストモデル）。 $K_2 = 0$ の時、第2のモデルは第1のモデルを特殊なケースとしてネストしている（ネストモデル）。同様に $K_3 = 0$ の時、第1のモデルは第2のモデルを特殊なケースとしてネストしている（ネストモデル）。 $K_2 > 0$ かつ $K_3 > 0$ の時、2つのモデルはネスト化していない（非ネストモデル）。

(1) ネストモデル

$K_2 = 0$ の時、モデル2はモデル1を特殊なケースとしてネストしていることになる。この場合、2つのモデルのHJ距離の等価性を検証するために、モデル2において λ の最後 K_3 個のベクトルを λ_2 とすると、 $\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2$ の漸近分布を導出し、 $\delta_1^2 = \delta_2^2$ の検証を行えばよい。すなわち、 $H_2 = (D_2'V_{22}^{-1}D_2)^{-1}$ を以下のように分割する。

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_{2,11} & H_{2,12} \\ H_{2,21} & H_{2,22} \end{bmatrix}$$

ここで $H_{2,22}$ は $K_3 \times K_3$ である。帰無仮説 $\delta_1^2 = \delta_2^2$ の下で、次式が成立する。

$$T(\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2) \sim \sum_{i=1}^{K_3} \xi_i x_i$$

ここで、 x_i は独立 χ_1^2 ランダム変数であり、 ξ_i は、の固有値である（ $H_{2,22}^{-1}V(\hat{\lambda}_2)$ は $V(\hat{\lambda}_2)$ の漸近分散である）。この漸近分布からネスト関係にあるモデル間のHJ距離の検定を行うことができる。

(2) 非ネストモデル

$y_1 \neq y_2$ （すなわち、 $e_1 \neq e_2$ ）として、2つのモデルの価格評価誤差が等しい、すなわち、 $e_1'V_{22}^{-1}e_1 = e_2'V_{22}^{-1}e_2$ となる場合について考える。帰無仮説 $\delta_1^2 = \delta_2^2$ における $\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2$ の漸近分布は、①両方のモデルが正しく特定されているとするか、②両方のモデルが誤って特定されているとするかによって異なる。2つの資産価格モデルが正しく特定されていると見なされるのは、両者の価格評価誤差がゼロとなる時である。

a) 両方のモデルが正しく特定されているとした場合

$y_1 \neq y_2$ の時、2つのモデルが正しく特定されているとした場合の $\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2$ の漸近分布は、帰無仮説 $\delta_1^2 = \delta_2^2 = 0$ の下で、

$$T(\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2) \sim \sum_{i=1}^{n_2+n_3} \xi_i x_i$$

となる。ここで、 x_i は独立 χ_1^2 ランダム変数であり、 ξ_i は

$$\begin{bmatrix} P_1'V_{22}^{-\frac{1}{2}}S_{11}V_{22}^{-\frac{1}{2}}P_1 & P_1'V_{22}^{-\frac{1}{2}}S_{12}V_{22}^{-\frac{1}{2}}P_2 \\ P_2'V_{22}^{-\frac{1}{2}}S_{21}V_{22}^{-\frac{1}{2}}P_1 & P_2'V_{22}^{-\frac{1}{2}}S_{22}V_{22}^{-\frac{1}{2}}P_2 \end{bmatrix}$$

の固有値である。 P_1 、 P_2 は各々 $V_{22}^{-\frac{1}{2}}D_1$ 、 $V_{22}^{-\frac{1}{2}}D_2$ の列に直交する $N \times n_1$ 、 $N \times n_2$ の直交行列とする（ $n_1 = N - K_1 - K_2 - 1$ 、 $n_2 = N - K_1 - K_3 - 1$ ）。また、

$$g_t(\theta) = \begin{bmatrix} g_{1t}(\eta) \\ g_{2t}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t y_{1t}(\eta) \\ r_t y_{2t}(\lambda) \end{bmatrix}$$

ここで、 $\theta = [\eta', \lambda']$ とすると、

$$S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E[g_t(\theta)g_{t+j}'(\theta)] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

である。この漸近分布から、検定を行うことができる。

b) モデルが誤って特定されているとした場合

モデルが誤って特定されているとした場合、 $y_1 \neq y_2$ である時、 $\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2$ の適切な漸近分布は、

$$\sqrt{T}(\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2 - (\delta_1^2 - \delta_2^2)) \overset{A}{\sim} N(0, u_d)$$

により与えられる。ただし、

$$u_d = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E[d_t d_{t+j}]$$

であり、 $d_t = q_{1t} - q_{2t}$ は

$$\begin{aligned} q_{1t} &= 2u_{1t}y_{1t} - u_{1t}^2 + \delta_1^2 \\ q_{2t} &= 2u_{2t}y_{2t} - u_{2t}^2 + \delta_2^2 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} u_{1t} &= e_1' V_{22}^{-1} (r_t - \mu_2) \\ u_{2t} &= e_2' V_{22}^{-1} (r_t - \mu_2) \end{aligned}$$

である。帰無仮説 $\delta_1^2 = \delta_2^2 \neq 0$ 下でのHJ距離の2乗の差は以下のように漸近的に正規分布に従う。

$$\sqrt{T}(\hat{\delta}_1^2 - \hat{\delta}_2^2) \overset{A}{\sim} N(0, u_d)$$

ただし d_t は次式で表される。

$$d_t = 2u_{1t}y_{1t} - u_{1t}^2 - 2u_{2t}y_{2t} + u_{2t}^2$$

この漸近分布から、非ネスト関係にあるモデル間のHJ距離の検定を行うことができる。