特集 学会賞

住宅ローンの借り手の立場から見た最適プリペイメント戦略の研究[1]

株式会社三菱UFJトラスト投資工学研究所　研究部
研究員　川口　宗紀/*Muneki Kawaguchi*
東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科
准教授　中川　秀敏/*Hidetoshi Nakagawa*

〈要　約〉

住宅ローンやMBS（Mortgage-Backed Securities）の評価において、プリペイメントは非常に重要なリスクファクターである。本稿では、固定金利の元利均等返済型住宅ローンを借りている債務者（モーゲージャー）が、定められたコストを支払うことで「借換」と「部分返済」の二種類のプリペイメントが可能という設定のもとで、当初ローンの返済終了時点におけるモーゲージャーの富に対する期待効用の最大化問題を定式化する。対応する最適なプリペイメント戦略を求めるために、インパルスコントロールの議論を応用して、期待効用最大化問題の値関数がベルマン原理を満たすことを示し、QVI（擬変分不等式）を導出する。また、QVIの解が滑らかであるという仮定の下で、QVIの解が元の最大化問題の解になることを示す。さらに、簡単な設定の下で数値実験を行い、異なるローン残高と金利水準の組み合わせに対する最適プリペイメント行動を導出し、その結果が実感と大きく乖離していないことを確認する。

目　　次

1　はじめに

1.1　フィナンシャル・プランニングの面からの研究目的

多くの人にとって、住宅ローンは人生における最大の借金となり、ライフプランを考えるうえで住宅ローンの返済計画をどのように立てるべきであるかは非常に重要な問題である。テレビや雑誌などのメディアでも、借換や部分返済といったプリペイメント（prepayment）[2]をする場合としない場合ではどちらが元利を合わせた総支払金額が小さくなるかを比較する、といった視点での住宅ローン返済計画の話題が取り上げられる機会も少なくない。しかしながら、プリペイメントの有利不利を総支払額の大小だけで論じてしまうことはいささか単純すぎないだろうか。

まずプリペイメントの際に発生する様々なコストを考慮する必要がある。手数料などの金銭的なコストは当然であるが、プリペイメント手続きを金融機関で実際に行う際の手間や心理的負担など

[1] 本論文は、川口・中川［2006］に、2006 年 9 月の日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会における発表内容を付け加え、全体的に加筆修正したものである。
[2] 期限前返済とも呼ばれるが、本稿ではプリペイメントという呼び方に統一する

もプリペイメント時のコストとして考慮する必要であろう。前者のコストは同じ条件のローン債務者に共通であり元々金額で表現されているために考慮することは難しくない。一方で後者のような時間や心理の面のコストは、債務者によって異なると考えるのが自然であり、しかも金銭的価値で表すことは容易ではない。ただし、ミクロ経済学でも消費に対する効用関数を導入した議論が一般的であるように、ローン債務者にとっての「効用関数」のようなものを想定することが一つの解決策になるのではないだろうか。

また、実際に割引率を考慮した現在価値ベースでは、総支払額を比較した場合には大小関係が逆転する場合もある。あるいは、将来予定される収入や支出の状況を考慮した場合、全体の総支払額が最小化されるはずの返済計画でも、ある時点の資産をマイナス水準にしないとその返済計画を達成できないという場合もあるかもしれない。

そこで、借金に対する忌避度、富の水準や収入・消費の変化などを考慮した数理的なモデルを考え、いろいろな制約条件のもとでローン債務者にとっての「効用」に相当する目的関数を最適化するような返済計画を論じることはできないだろうかと考え、今回の研究を始めた。

最初から現実的な設定を盛り込みすぎることは難しすぎるので、リスク・ファクターとしては市場金利の変動だけを考え、対象とする住宅ローンは、日本ではまだあまり一般的ではないが、超長期の全期間固定金利型の元利均等返済ローンを考える。

研究の最終的なアウトプットは実務的にも有意義なものになるように意識しており、フィナンシャル・プランニングの知識があれば十分に理解可能なアウトプット表現を試みている。しかし、モデルの設定およびその理論的な枠組みを議論するためには、数式を用いた数学的議論が避けられない。また、今回の問題は住宅ローンの売り手である金融機関の商品設計や住宅ローンの証券化商品であるRMBSの価値評価などへの応用も考えられる。

そのため、以下では住宅ローンやその証券化商品に関する数理ファイナンスの理論的研究の系譜について概観する。

1.2　理論面の研究背景と研究目的、および論文構成

住宅ローンの借り手（モーゲージャー、mortgagor）には、所定の手数料を支払うことでいつでも自由にプリペイメントを行う権利が与えられている。貸し手から見れば、このプリペイメントはキャッシュインフローを不安定にする要因、つまりリスク要因となる。住宅ローンの価値評価においてはプリペイメントのリスクをどのように計測するかが、1つの重要なポイントとなっている。プリペイメントのモデルには、個々のローンに注目したモデルと多数の住宅ローンで構成されたローンプール全体に注目したモデルがある。ローンプール全体に対するモデルはResidental Mortgage-backed securities（RMBS）と呼ばれる証券化商品の分析にしばしば用いられる。日本では住宅金融支援機構（旧住宅金融公庫）が発行しているRMBSが代表的な物の1つとして挙げられる。2000年度より発行が開始され、2005年12月の段階での全発行額は約2兆8,000億円を超える。

住宅ローンにおけるプリペイメントは、様々な要因によって引き起こされる。このうち、プリペイメントの主要因と言われているのは「借換」（refinance）である。モーゲージャーは市場の借り入れ金利が低下してきた場合、その時点で借りているローンの金利よりも低い金利のローンで借り入れを行い、その資金によって元の住宅ローンの返済を行う。その結果、モーゲージャーは自身の将来の金利負担を軽減することができる。また、モーゲージャーが自身の余裕資金を使ってローン残高の一部もしくは全額を返済し、ローンの返済期間を短縮（curtailment）を図る場合もある。その他、引越しや離婚による持ち家の売却、モーゲージャーのデフォルトによる代位弁済などがプリペイメントの原因として挙げられる。

プリペイメントのモデルを構築する際には、住宅ローンの貸し手（mortgagee）やRMBSの投資家の視点とモーゲージャーの視点の二つの視点から考えることができる。前者は、住宅ローンのポートフォリオやMBSの価値評価のために、対象となるローン・プール内の多数のモーゲージャーが将来どのようにプリペイメントするかを確率モデルで定式化し、分析することが主な問題となる一方で、後者は各モーゲージャーが何らかの目的関数を最適化するために、どのようなプリペイメント戦略をとるべきかを考えることが問題の中心となる。

MBS評価のためのプリペイメントモデルについては様々なモデルが提案されている。アプローチの違いから2つに大別することができ、1つはreduced-formアプローチモデル、もう1つはstructuralアプローチモデルと呼ばれている。

reduced-formアプローチモデルは、瞬間的なプリペイメントの発生確率をハザードレートを用いて記述するモデルを指す。このハザードレートにプリペイメントの要因を表現する状態変数をもたせることで、市場の状態に合わせたプリペイメント構造を表現することが可能となる。このアプロ

ーチの研究としては、Schwarz and Torous（1989）が有名であり、また日本においても、「一部繰上返済」「全額繰上返済」「代位弁済」それぞれについて比例ハザードモデルを設定し、loan-by-loanの分析を行った杉村（2003）などがある。また、住宅金融公庫が発行しているMBSの評価モデルとしては、モーゲージプールを「償還しやすい」グループと「償還しにくい」グループに分けて、バーン・アウト効果[3]を表現した野崎（2005）などがある。

一方のstructuralアプローチモデルは、住宅ローンの借り手が保有するプリペイメントの権利を金利オプションに見立て評価を行うものである。ただし、現実のプリペイメントは合理的ではなく不均一に発生しているため、Stanton（1995）はプリペイメント・コストという概念を導入してローン・プールの不均一性をモデル化した。また、正田・中川（2002）、Nakagawa and Shouda（2004）、Nakagawa and Shouda（2005）も、別の形でプリペイメント・コストを取り入れたプリペイメントモデルを考案している。

一方で、モーゲージャーすなわちローンの借り手の立場に立ったプリペイメントモデルとしては、Pliska（2004）、Pliska（2005）や中川（2004）が挙げられる。Pliska（2004）、Pliska（2005）では保守的な市場を設定し、債務者の返済行動によってローン金利が内因的に決定されるとしている。[4] プリペイメントのタイプとしては借換のみを考えており、離散時間Markov連鎖の枠組みで将来のローン返済の期待現在価値を最小化する問題を考えている。中川（2004）では、離散時間の下で「借換」と「部分返済」の二種類のプリペイメントを考慮し、モーゲージャーの富についての期待効用最適化を目的としたプリペイメント行動を仮定し、ベルマン原理を利用した計算アルゴリズムを用いて、ある時点において金利と富の水準に応じた最適なプリペイメント行動を求めるための簡単な数値実験を行っている。

本研究でも、モーゲージャーの立場で「借換」と「部分返済」の二種類のプリペイメントを考慮する最適プリペイメント問題を考える。中川（2004）の提案したモデルを連続時間上で（借換時点を求める）最適停止問題と（部分返済時点と部分返済する金額を求める）インパルスコントロールの混合問題として定式化し直し、実際にその問題を解くための方法について議論する。

インパルスコントロールは確率制御の１つのタイプであり、特に取引コストに固定コストが含まれる場合に、いつどれだけ売買するのが最適であるかを分析する最適投資問題に応用されてきた[5]。借換は返済時点だけが問題であるが、部分返済は返済時点と返済する元本の額の両方を求める必要があり、またいずれもプリペイメント時に固定コストを考えることから、本研究では最適停止問題とインパルスコントロールの混合問題による定式化が適当であると考えた。

リスクとしては瞬間的短期金利の変動リスクだけに注目する。この瞬間的短期金利に適当なスプレッドを加えたものが各時点で新しく契約する際のローン金利になるとし、またモーゲージャーの富は瞬間的短期金利で運用されると考える。

また、モーゲージャーの目的関数として、当初ローンの返済終了時点におけるモーゲージャーの富に対する効用関数を考え、モーゲージャーはその期待効用を最大化するように行動すると仮定し、期待効用の最大化問題としてプリペイメント戦略の最適化問題を定式化する。

この期待効用の最大化問題を直接解くのは難しいと考えられる。そこでまず、最大化問題から得られる値関数に対してベルマン原理が成り立つことを数学的に証明する。またその後形式的ではあるが、値関数が満たすべきQVI（Quasi Variational Inequalities、擬変分不等式）を導出し、値関数にある程度のregularityがあるという仮定の下で、そのQVIの解が元の最適化問題の解になるというverificationの議論を行う。細かい問題がいくつか残っているが、上記の議論を通じて、QVIを数値的に解くことによって、具体的な設定のもとで最適（に近い）プリペイメント戦略を効率的に計算することが可能になると考える。

本稿の構成は以下の通りである。

第２節では、本研究で扱う連続時間での固定金

[3] ローン組成から金利が変化していき１回目の金利低下局面でプリペイメントが進むことにより、２回目の金利低下ではプリペイメントが起こりにくくなるという現象のこと。１回目の金利低下により償還しやすいローンが先に償還してしまうためにこのような現象が起こる。

[4] Pliska（2004）では、このアプローチを均衡的アプローチ（equilibrium approach）と呼び、ローン金利を決定要因について議論を行っている。

[5] 例えば、Korn（1998）ではリスクフリー資産と株式の２資産の最適投資問題を考えており、株式を売買するために必要な取引コストが、売買額に比例する比例コストと売買額に依存しない固定コストの和で表される場合についての議論を行っている。また、売買コストを考慮した最適投資問題は近年盛んに研究されており、Buckley and Korn (1998), Bielecki and Pliska (2000), Pliska and Suzuki (2004), Nagai (2004) などが挙げられる。

利の元利均等返済型住宅ローンの設定をモデル化し、「借換」と「部分返済」によるローン条件の変化およびプリペイメント時の取引コストについて特徴付けする。第3節では、モーゲージャーの富のモデルを与え、当初ローンの返済終了時点におけるモーゲージャーの富に対する期待効用に対するプリペイメント戦略の最適化問題を定式化する。第4節では、前節の最適化問題から得られる値関数に対してベルマン原理が成り立つことを数学的に証明した後、形式的に、値関数が満たすべきQVIを導出し、値関数が滑らかであるという仮定の下でそのQVIの解が元の最適化問題の解になることを示す。さらに第5節では、簡単な設定の下での数値実験を通じて、現時点でのローン残高と金利水準の様々な組み合わせに対する現時点での最適返済行動を求め、それを「最適返済行動マップ」という形で諸条件と最適返済行動の関係を分かりやすく示し、その結果が実感と大きく乖離していないことを確認する。

2 住宅ローンのモデル

連続時間における元利均等返済の住宅ローンを想定する。またローン金利は契約時に決定され、プリペイメントが起こらなければ満期まで同じ固定金利が適用されるものとする。いま、時点0において、当初元本 P_0、最終返済時点T、ローンの契約金利Rである住宅ローンを契約することを考える。このとき、ある時点 $t\ (0 \le t \le T)$ でのローン残高 $p(t)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dp(t)}{dt} = Rp(t) - c, \quad p(0) = P_0, \quad p(T) = 0. \qquad (1)$$

ここで変数 c は連続返済率を表し、式(1)を解く事で次のように求まる。

$$p(t) = \frac{cP_0(1 - e^{-R(T-t)})}{R}, \quad c = \frac{R}{1 - e^{-RT}}.$$

後で、プリペイメントを考慮していくことになるが、プリペイメント行動を起こしたとき最終返済時点、ローンの契約金利やローンの返済率が変化する。それぞれが時間に依存していることを明確にするために、$T(t)$、$R(t)$、$c(t)$と表記する。それぞれの変数に関して各要素の推移を見ると図1のようになる。

2.1 借換

時点 τ で借換を行う場合を考える。このとき、新しいローン金利 $R(\tau)$ で借り換えられると仮定する。このとき新しい返済率は、

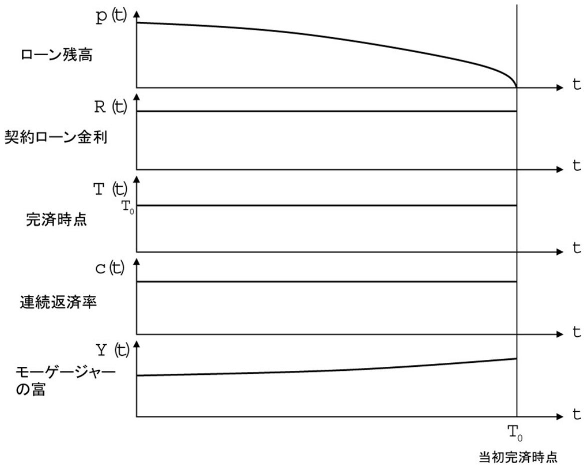

図1　ローン返済に関する各要素の推移

$$c(\tau) = \frac{R(\tau)p(\tau-)}{1 - e^{-R(\tau)(T-\tau)}},$$

で与えられる。また最終返済時点は変化せず$T(\tau) = T(\tau-)$ であるとする。さらに、残存元本も変化しないため $p(\tau) = p(\tau-)$ である。

借換を行うために必要なコストは、非負の定数 K_r、k_r を用いて
と表されるとする。すなわち、固定コストと借換

$$K_r + k_r p(\tau-),$$

時点の残存元本に比例したコストがかかるものとする。

2.2 部分返済（全額返済も含む）

時点 τ で金額 ξ だけ部分返済を行うとする。このとき、返済額 ξ に応じて最終返済時点が手前に移動する。当然ながら返済額は残存元本を超えることはないので、$0 < \xi \le p(\tau-)$ を満たす。

最終返済時点以外のローン条件に変化は無く、$R(\tau-) = R(\tau)$、$c(\tau-) = c(\tau)$ とする。最終返済時点は、

$$T(\tau) = \tau - \frac{1}{R(\tau-)} \log\left(1 - \frac{R(\tau-)}{c(\tau-)}(p(\tau-) - \xi)\right)$$

となる。残存元本は返済額の分だけ減少し、$p(\tau) = p(\tau-) - \xi$ となる。

部分返済を行うために必要なコストは、非負の定数 K_p を用いて

$$K_p + \xi,$$

と表されるとする。すなわち、返済する元本分と固定コストを合わせたものが、部分返済時に必要となる[6]。

[6] 本稿では部分返済時に実際に支払うことが必要な費用という解釈で、コストに返済分を含めることにする。

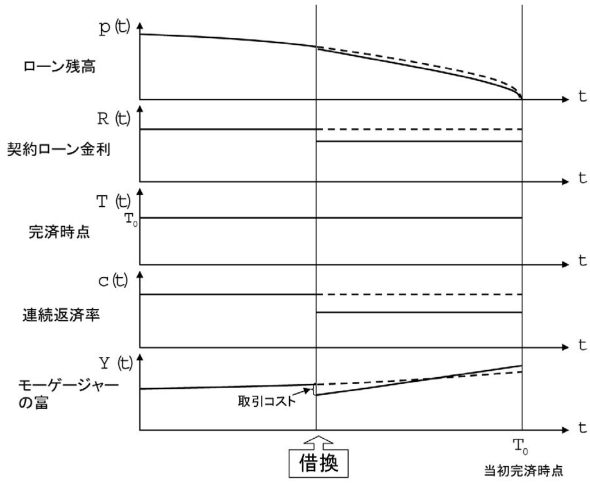

図２　借換時の各変数の推移

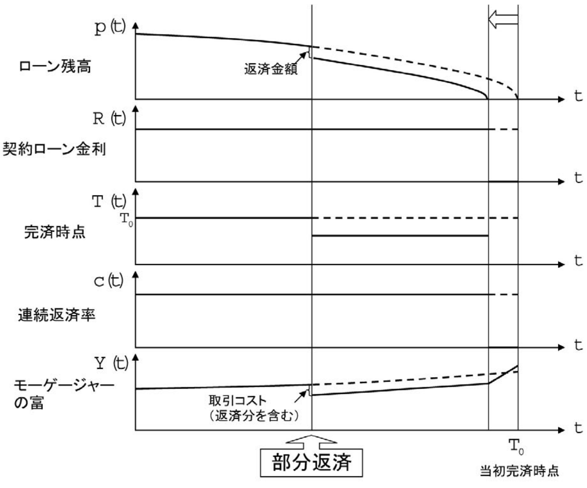

図３　部分返済時の各変数の推移

借換、部分返済について、各要素の推移を図示すると、図２、３のようになる。

3　最適プリペイメント戦略

前節で住宅ローンのモデルとプリペイメントについてモデル化を行った。もし返済行動が自由に出来れば、最適プリペイメント戦略はすぐに全額返済してしまうことであることは自明である。しかし、実際には元本を超える資金をもっていないからローンを組むのであって、自由に返済行動ができるというのは現実的ではないと思われる。そこで、本節ではモーゲージャーの富についてモデルを設定する。この上でローンが完済した段階でのモーゲージャーの富に対する期待効用を最大にするように、モーゲージャーは最適プリペイメント戦略を選択すると仮定し、モデルを構築していくことにする。

3.1　モーゲージャーの富

モーゲージャーは住宅ローンの返済を定期的に行っていく。このとき返済のための原資は、例えばモーゲージャーの収入や自己資産の運用益などが考えられる。そこで、モーゲージャーに対するキャッシュフローを次のように仮定する。

- ・キャッシュインフロー
  - －モーゲージャーの純収入（収入－消費）
  - －モーゲージャーの富を預金することによる金利収入
- ・キャッシュアウトフロー
  - －ローンの返済

この仮定の下で、モーゲージャーの富のプロセス $Y(t)$ を表現すると次の式のようになる。

$$\frac{dY(t)}{dt} = r(t)Y(t) + a(t) - c(t).$$

ここで、$a(t)$ はモーゲージャーの純収入で、確定的であるとする。$c(t)$ はローンに対する連続的な返済率である。ただし、借換しない限り $c(t)$ は一定であることに注意。

さらに、$r(t)$ は市場でのデフォルトフリーのショートレートを表し、次の式で表されるものとする。

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t).$$

ここで、$W(t)$ は確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}$）上のブラウン運動とする。また、$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は $W(t)$ から生成されるフィルトレーションとする。さらに μ、σ は、r に対するSDEの解が存在するための条件を満たしていると仮定しておく。

住宅ローンの新規契約金利をデフォルトフリーのショートレートとローン返済の満期に依存して決定されるとする。時点 t での住宅ローンの新規契約金利を $q(t, T)$ とし、新規契約するローンの満期を T とすると、

$$q(t,T) = r(t) + g(T-t),$$

と表されることにする。このとき $g(T-t)$ はデフォルトフリーのショートレートとローン金利のスプレッドを表す関数で、任意の t に対し $g(t) > 0$ かつ t に対し単調非減少、確定的であるとする。借換を行うときには、このローン金利 $q(t, T)$ が適用されるとする。さらに、現在のローン金利と借換金利の差を $X(t)$ で定義する。つまり、

$$X(t) = R(t) - q(t,T) = R(t) - r(t) - g(T-t), \quad (2)$$

である。

3.2 富とプリペイメントの関連付け

モーゲージャーは自身の富によって、返済行動に制約を受けるはずである。つまり、自身の富を超えてプリペイメントすることが出来ない。また、住宅ローン以外の借入はできないものとする。つまりすべての時点tに対し、$Y(t) \geq 0$であるとする。

このとき2種類のプリペイメントが、各時点で行えるための条件を調べておく。ただし、収入が低下してローン以外の借入をせざるを得ない場合を避けるために、全ての時点tに対し$a(t) \geq c(0)$であることを仮定しておく。

借換の場合

借換を考える場合の選択肢は、できるかできないかの2通りである。借換ができるのは借換コストが富を下回っている場合であり、つまり次の式を満たすときに時点τで借換を行うことができる。

$$K_r + k_r p(\tau-) \leq Y(\tau-).$$

部分返済の場合

部分返済ができるかどうか、またどの程度返済を行えるかはその時点の富によって決まる。部分返済についても借換と同じように、コストが富を下回っている場合に部分返済が可能となる。残存元本を超える返済の必要は無いことに注意して、部分返済可能額の領域を$\mathcal{A}$で表すことにすると、

$$\mathcal{A}(y,p) = \{\xi \in \mathbf{R} | K_p + \xi \leq y, 0 < \xi < p\}.$$

この部分返済可能領域は、そのときのモーゲージャーの富yと残存元本pに依存して決まる。

3.3 プリペイメント戦略

プリペイメント戦略Iを考える。このIは$\{(\tau_i, \xi_i)\}_{i\in\mathrm{N}}$のように停止時刻$\tau_i$と確率変数$\xi_i$の組で表される。$\{\tau_i\}_{i\in\mathrm{N}}$は借換もしくは部分返済を実行する時点である。また$\{\xi_i\}_{i\in\mathrm{N}}$は借換を行う場合は0、部分返済をするときには返済額を決める確率変数である。また、このプリペイメント戦略を実行した時のモーゲージャーの富を$Y^I(t)$と表記することにする。同様に、完済時点T、契約ローン金利R、連続返済率cについてもそれぞれ、T^I、R^I、c^Iの様に記述することにする。ここで、このプリペイメント戦略の実行可能性について、以下のことを定義しておく。

定義1． プリペイメント戦略$I := \{(\tau_i, \xi_i)\}_{i\in\mathrm{N}}$がadmissibleとは、以下を満たすときを言う。

- 任意の$k \in \mathrm{N}$に対して、τ_kは$\sigma(r(s-), Y(s-), T(s-), R(s-), c(s-), \tau_l, \xi_l; s \leq t, l \leq k)$-停止時刻である。
- 任意の$k \in \mathrm{N}$に対して、ξ_kは$\sigma(r(\tau_k-), Y(\tau_k-), T(\tau_k-), R(\tau_k-), c(\tau_k-), \tau_l, \xi_l; s \leq t, l \leq k)$-可測である。
- 任意のtに対して、$Y^I(t) \geq 0$。

次にモーゲージャーの効用を考え、最適なプリペイメント戦略について考える。モーゲージャーは当初のローン完済時での富に対する期待効用を最大化するように行動すると考える。即ち、モーゲージャーが最大化したい目的関数は次の式で与えられるとする。

$$\mathbf{E}[U(Y^I(T_0))]. \tag{3}$$

ここで効用関数$U(\cdot): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$は、単調増加の凹関数である。また、$T_0$はモーゲージャーがローンを完済した時点を想定しているが、部分返済により完済する時点は変わるため、当初予定の完済時点$T_0 = T(0)$とする。プリペイメント戦略を適切に選ぶことによって、この目的関数を最大化する。つまり値関数vは、

$$\begin{aligned} v(t,x,y;T,R,c) &= \sup_{I\in\mathcal{I}_t} \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[U(Y^I(T_0))] \\ &:= \sup_{I\in\mathcal{I}_t} \mathbf{E}[U(Y^I(T_0))|X(t)=x, Y(t)=y, \\ &\qquad T(t)=T, R(t)=R, c(t)=c]. \end{aligned} \tag{4}$$

$\mathcal{I}_t$は時点t以降のadmissibleなプリペイメント戦略の集合である。つまり、$\tau_1 \geq t$を満たすようなadmissibleなプリペイメント戦略の集合である。

4 ベルマン原理による最適プリペイメント戦略の導出

この節では、(4)で与えられた最大化問題を具体的に解く方法として、ベルマン原理を経由して、値関数(4)が満たすべきQVI（Quasi Variational Inequalities、擬変分不等式）を導出し、(4)を解く問題をQVIを解く問題に帰着させる方法を考える。その際に、値関数にある程度のregularityがあるという強い仮定の下で、そのQVIの解が元の最適化問題の解になるというverificationの議論を行う。

4.1 ベルマン原理

前節で定義した値関数(4)を実現するプリペイメント戦略を導出する方法はいくつか考えられるが、ここでは最適停止問題やインパルスコントロールで一般的に議論されるように、ベルマン原理が成り立つことを証明する。本稿では、インパルスコントロールの問題を扱っているKorn（1998）を参考にしてベルマン原理の証明を与える。

まず、時点t でプリペイメントを行ったときの値関数を求める作用素$\mathcal{M}$を定義しておく。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}v(t,x,y;T,R,c)\\
&:= \max\Big\{ v\Big(t,0,y-K_f-k_f p;\\
&\qquad\qquad T, q(t,T), \frac{Rp}{1-e^{-R(T-t)}}\Big),\\
&\sup_{\xi\in\mathcal{A}(y,p)} v\Big(t,x,y-K_p-\xi;\\
&\qquad\qquad t-\frac{1}{R}\log\Big(1-\frac{R}{c}(p-\xi)\Big), R, c\Big)\Big\} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

もしプリペイメントを行ったときに値関数が増加するならば、プリペイメントを行えば良い。つまり任意の t、x、y、T、R、c に対し、$v(t,x,y;T,R,c) \geq Mv(t,x,y;T,R,c)$ が成り立つ。しかし t でプリペイメントすることが最適である場合には、$v(t,x,y;T,R,c) = \mathcal{M}v(t,x,y;T,R,c)$ が成り立つ。

以上の設定の下で次の定理が成り立つ。

定理２． 式(4)で定義された値関数に対し、次のベルマン原理が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&v(t,x,y;T,R,c)\\
&= \max\Big\{ v_0(t,x,y;T,R,c),\\
&\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T_0}} \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[\mathcal{M}v(\tau,X(\tau),Y(\tau);T,R,c)]\Big\}\\
&(=: \mathcal{G}v(t,x,y;T,R,c)). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathcal{T}_{t,T_0}$ は、$(t, T_0]$ に値をとる任意の停止時間の集合である。また v_0 はプリペイメントしない場合の目的関数であり、

$$
\begin{aligned}
&v_0(t,x,y;T,R,c)\\
&= \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}\Big[U\Big(\Lambda(t,T_0)^{-1}\big(y\\
&\qquad + \int_t^{T_0}\Lambda(t,s)\{a(s)-c\}ds\big)\Big)\Big], \qquad (7)
\end{aligned}
$$

である。式中の$\Lambda(t,s)$ は時点 t からみた時点 s の割引率であり、ショートレートプロセスから求めることができる。

証明は、川口・中川（2006）の付録を参照されたい。

4.2　QVIの導出と最適プリペイメント戦略の存在について

ベルマン原理を表す式(6)において、右辺のsupが $\tau^*\in\mathcal{T}_{t,T_0}$ で達成されるとして、

$$
\begin{aligned}
&v(t,x,y;T,R,c)\\
&= \max\{v_0(t,x,y;T,R,c),\\
&\quad \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[\mathcal{M}v(\tau^*,X(\tau^*),Y(\tau^*);T,R,c)]\}\\
&\geq \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[\mathcal{M}v(\tau^*,X(\tau^*),Y(\tau^*);T,R,c)],
\end{aligned}
$$

を得る。プリペイメントをするときには$v(t,x,y;T,R,c) = \mathcal{M}v(t,x,y;T,R,c)$ を満たすという結果や、伊藤の公式を形式的に適用して計算を進めると、

$$
\begin{aligned}
&v(t,x,y;T,R,c)\\
&= \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[v(\tau^*,X(\tau^*),Y(\tau^*);T,R,c)]\\
&= \mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}\Big[v(t,x,y;T,R,c)\\
&\quad + \int_t^{\tau^*}\Big\{\frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial x}dX_s\\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial y}dY_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}d\langle X\rangle_s\Big\}\Big]\\
&\geq v(t,x,y;T,R,c)\\
&\quad + \mathbf{E}\Big[\int_t^{\tau^*}\Big\{\frac{\partial v}{\partial s}ds\\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial x}\{-\mu(r_s,s)ds - \sigma(r_s,s)dW(s) + g'(T-s)ds\}\\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial y}\{r_sY_s + a(s) - c\}ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sigma(r_s,s)^2 ds\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

dX_t は(2)から計算した。次に任意の $\tau\in\mathcal{T}_{t,T_0}$ を考える。

$$
\begin{aligned}
&v(t,x,y;T,R,c)\\
&\geq v(t,x,y;T,R,c) + \mathbf{E}\Big[\int_t^{\tau}\Big\{\frac{\partial v}{\partial s}ds\\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial x}\{-\mu(r_s,s)ds - \sigma(r_s,s)dW(s) + g'(T-s)ds\}\\
&\qquad + \frac{\partial v}{\partial y}\{r_sY_s + a(s) - c\}ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sigma(r_s,s)^2 ds\Big\}\Big]\\
&= v(t,x,y;T,R,c) + \mathbf{E}\Big[\int_t^{\tau}\Big\{\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial x}\{-\mu(r_s,s) + g'(T-s)\}\\
&\qquad + \frac{\partial v}{\partial y}\{r_sY_s + a(s) - c\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sigma(r_s,s)^2\Big\}ds\Big]
\end{aligned}
$$

ここで、作用素$\mathcal{L}$を次の式で定義する[7]。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}v(t,x,y;T,R,c)\\
&:= \frac{\partial v}{\partial t} + \{-\mu(R-x,t) + g'(T-t)\}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&\qquad + [\{R-x\} + a - c]\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma(R-x,t)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

この作用素 $\mathcal{L}$ を用いると値関数 v の満たすべき条件は、

[7] この作用素 $\mathcal{L}$ は一般的に扱い難い形をしている。例えば２階微分の項が退化する場合には、一般論の適用が難しい。そのため $\sigma(R-x,t)^2 \geq {}^{\exists}\varepsilon > 0$ のような仮定しておくことがある。

$$\mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}\left[\int_t^{\tau} \mathcal{L}v(s,x,y;R,T,c)ds\right] \le 0,$$

となる。この式が任意の τ に対して成り立っているので、極限定理により任意の t に対し $\mathcal{L}v\ (t, x, y\ ; T, R, c) \le 0$ であることが分かる。特に、プリペイメントしない場合が最適の時には、$\mathcal{L}v\ (t, x, y\ ; T, R, c) = 0$ である。従って、最適プリペイメント戦略の定義した値関数 v は次の 4 式を満たす。

$$\mathcal{L}v(t,x,y;T,R,c) \le 0. \qquad \text{(QVI. 1)}$$

$$v(t,x,y;T,R,c) \ge \mathcal{M}v(t,x,y;T,R,c). \qquad \text{(QVI. 2)}$$

$$\{v(t,x,y;T,R,c) - \mathcal{M}v(t,x,y;T,R,c)\} \times \mathcal{L}v(t,x,y;T,R,c) = 0. \qquad \text{(QVI. 3)}$$

$$v(T_0,x,y;T,R,c) = U(y). \qquad \text{(QVI. 4)}$$

ここで v がQVIが定義できる程度の滑らかさとgrowth conditoinを持つと仮定しておく。つまり $v \in C^{1,2,1}$ であり次の式を満たすとする[8]。

$$\mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}\left[\int_0^{T_0} (\sigma(r,s)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x,y;T,R,c))^2\right] < \infty.$$

$$\mathbf{E}_{t,x,y;T,R,c}[v(T_0,X(T_0),Y(T_0);T,R,c)] < \infty.$$

この条件は (QVI.1) 式を導出するために必要となる条件である。

定義 3． w をこの*QVI*の連続な解とする。この w を用いて構築される次のような戦略が存在すれば、*admissible QVI*コントロールと呼ぶ。

$$\begin{cases} (\tau_0,\xi_0) := (0,0). \\ \tau_i := \inf\{t \le \tau_{i-1} : \\ w(t,X(t),Y(t);T(t),R(t),c(t)) \\ = \mathcal{M}w(t,X(t),Y(t);T(t),R(t),c(t))\} \wedge T_0. \\ \xi_i := \begin{cases} 0 \\ (\mathcal{M}\text{ の定義で,1 番目の要素が大きいか} \\ \text{両者が等しいとき}) \\ \arg\max_\xi\{w(\tau_i,X(\tau_i),Y(\tau_i)-K_p-\xi; \\ \qquad T_t^\xi,R,c)\} \\ (\mathcal{M}\text{ の定義で,2 番目の要素が大きいとき}). \end{cases} \end{cases}$$

これまでの議論から、期待効用最大化問題をベルマン原理を通じてQVIを導出することができ、QVIに連続な解が存在すれば、構成方法が具体的に示されているadmissible QVIコントロールという形でプリペイメント戦略を与えることができることを示した。したがって、もしこのadmissible QVIコントロールがもともと問題にしていた期待効用最大化問題に対応する最適プリペイメント戦略になっていることが言えれば、あとはQVIを数値的に解くことに注力すれば良いことになる。

そのためにはQVIの連続な解が存在すること、およびその解が伊藤の公式が適用できる程度の滑らかさをもつことが要求され、今回のような複雑な値関数について解の存在およびregularityを直接的に証明するのは困難であると考える。しかしながら、我々の問題に対しては、QVIに対する粘性解の存在が言えれば十分である。今回は粘性解の存在の証明は行っていないが、肯定的に解決できるものと考え、喫緊の課題として粘性解による正当化を行うつもりである[9]。

以下の命題はverification theoremと呼ばれるものに相当する。QVIの解自体に滑らかさを仮定しているが、本質的な議論は粘性解の場合でも同様である。

命題 4． v^* をQVIの解とする。ただし v^* は伊藤の公式が適用でき、適当なgrowth conditionを満たすとする。また、v を式(4)で与えられる関数とする。このとき、任意のプリペイメント戦略 $I \in \mathcal{I}$ に対して、

$$v(t,x,y;T,R,c) \le v^*(t,x,y;T,R,c), \qquad (8)$$

が成り立つ。さらに*admissible*なQVIコントロールが存在すれば、$v = v^*$ となる。

したがってQVIを解き、対応するadmissible QVIコントロールの存在性が言えれば、最適プリペイメント戦略を導出することが可能となる。具体的にはQVIコントロールの定義を用いて、

$$\begin{cases} (\tau_0,\xi_0) := (0,0) \\ \tau_i := \inf\{t \le \tau_{i-1} : \\ v^*(t,X(t),Y(t);T(t),R(t),c(t)) \\ = \mathcal{M}v^*(t,X(t),Y(t);T(t),R(t),c(t))\} \wedge T_0 \\ \xi_i := \begin{cases} 0 \\ (\mathcal{M}\text{ の定義で,1 番目の要素が大きいか} \\ \text{両者が等しいとき}) \\ \arg\max_\xi\{v^*(\tau_i,X(\tau_i),Y(\tau_i)-K_p-\xi; \\ \qquad T_t^\xi,R,c)\} \\ (\mathcal{M}\text{ の定義で,2 番目の要素が大きいとき}). \end{cases} \end{cases}$$

と表すことができる。

証明． $v \le v^*$ のみ示せばよい。あるプリペイメント戦略 $I = \{(\tau_i,\xi_i)\}_{i=1,.}$ を考える。このとき、プリペイメント回数はパスごとに異なるため、この回数を確率変数 N で表している。いま v^* はQVIの解なので、$i = 1,\ldots,N$ に対し、

$$\begin{aligned} &v^*(\theta_i,X(\theta_i),Y(\theta_i);T(\theta_i),R(\theta_i),c(\theta_i)) \\ &= \mathcal{M}v^*(\theta_i-,X(\theta_i-),Y(\theta_i-);T(\theta_i-),R(\theta_i-),c(\theta_i-)) \\ &\le v^*(\theta_i-,X(\theta_i-),Y(\theta_i-);T(\theta_i-),R(\theta_i-),c(\theta_i-)), \end{aligned}$$

である。また $i = 1,\ldots,N+1$ とし、$\theta_0 = 0$、$\theta_{N+1} =$

[8] つまり v は, t について 1 階微分可能、x について 2 階微分可能、y について 1 階微分可能の関数である。

[9] QVI の粘性解については、Øksendal and Sulem (2005) などを参考にして考えたい。

T_0とする。

$$
\begin{aligned}
& v^*(\theta_i-, X(\theta_i-), Y(\theta_i-); T(\theta_i-), R(\theta_i-), c(\theta_i-)) \\
& - v^*(\theta_{i-1}, X(\theta_{i-1}), Y(\theta_{i-1}); T(\theta_{i-1}), R(\theta_{i-1}), c(\theta_{i-1})) \\
& \leq \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \mathcal{L}v^*(s, X(s), Y(s); T(s), R(s), c(s))ds \\
& + \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \sigma(r, s)\frac{\partial v^*}{\partial x}(s, X(s), Y(s); T(s), R(s), c(s))dW_s.
\end{aligned}
$$

上記2つの式について、それぞれ定義されているiについて総和をとる。煩雑になるので$v^*(\theta_i, X(\theta_i), Y(\theta_i); T(\theta_i), R(\theta_i), c(\theta_i))$を$\hat{v}^*(\theta_i)$と書くことする。

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} \{\hat{v}^*(\theta_i) - \hat{v}^*(\theta_i-)\} + \sum_{i=0}^{N+1} \{\hat{v}^*(\theta_i-) - \hat{v}^*(\theta_{i-1})\} \\
& \leq \int_{\theta_0}^{\theta_N} \sigma(r, s)\frac{\partial v^*}{\partial x}(s, X(s), Y(s); T(s), R(s), c(s))dW(s).
\end{aligned}
$$

この式の左辺は、

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} \{\hat{v}^*(\theta_i) - \hat{v}^*(\theta_i-)\} + \sum_{i=0}^{N+1} \{\hat{v}^*(\theta_i-) - \hat{v}^*(\theta_{i-1})\} \\
& = \hat{v}^*(\theta_{N+1}-) - \hat{v}^*(\theta_0) \\
& = \hat{v}^*(\theta_{N+1}) - \hat{v}^*(0),
\end{aligned}
$$

となる。この両辺について期待値$\mathrm{E}_{0,x,y;T,R,c}[\cdot]$をとると、

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[\hat{v}^*(\theta_{N+1})] - \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[\hat{v}^*(0)] \leq 0 \\
& \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[\hat{v}^*(\theta_{N+1})] \leq \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[\hat{v}^*(0)] \\
& \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[v^*(T_0, X^I(T_0), Y^I(T_0); T^I(T_0), R^I(T_0), c^I(T_0))] \\
& \qquad \leq v^*(0, x, y; T, R, c) \\
& \mathbf{E}_{0,x,y;T,R,c}[U(Y^I(T_0))] \leq v^*(0, x, y; T, R, c),
\end{aligned}
$$

従って、左辺に対し$\sup_{I\in\mathcal{I}}$を取ると、

$$
v(0, x, y; T, R, c) \quad \leq \quad v^*(0, x, y; T, R, c).
$$

となる。$v(t, x, y; T, R, c) \leq v_*(t, x, y; T, R, c)$については、まず$N_l = \min\{i = i, ..., N | t \leq \theta_i\}$を考える。さらに$i = N_l, ..., N$で和をとり、期待値$\mathrm{E}_{t,x,y;T,R,c}[\cdot]$をとることで示せる。

注5．値関数が一意に定まったとしても、上記の通り構築された最適プリペイメント戦略は一意に定まるかどうか分からない。これはQVIコントロールについて「借換」と「部分返済」という二通りの選択が可能な場合があるためである。つまり作用素$\mathcal{M}$の定義において、最大値を比較する二つの項が等しいときに生じる。それぞれのプリペイメントにおいて「借換」と「部分返済」の値関数が同じ場合、本稿では「借換」が優先すると仮定しプリペイメント戦略が一意になるようにする。

注6．QVIの数値解法も重要な課題である。基本的にはアメリカン・オプションの評価から得られる変分不等式の数値解法を応用することがまず考えられるが、時間も含めた3次元の変数を扱う必要があり、また作用素$\mathcal{L}$や$\mathcal{M}$も複雑であるため慎重に考える必要がある。そのまま適用できるわけではないが、QVIの数値解法に触れているBielecki et al. (2003) やØksendal and Sulem (2005)の方法を参考にしたい。

実際に数値的に最適プリペイメント戦略の計算が可能になれば、以下のような状況が説明できるかどうかを検討したい。

将来の借換機会を考えないような静的なモデルを用いた場合、部分返済による利子負担の軽減がコストに見合えば、部分返済をすぐ行うという結果が導かれる[10]。その結果借換ローン金利が低下してきたとしても、借換をするためのコストを捻出できないという状況が発生しうる。本稿のモデルを使った場合には、将来の借換のために部分返済を延期するような戦略をモデルで表現できる可能性がある。このような状況は、一つの戦略のみしか持たない最適投資問題ではとらえることができない特徴である。

また、上記の通り今回の定式化では、将来の借換の可能性を理由にモーゲージャーは富を留保する可能性がある。しかしモーゲージャーは自身の富が低すぎる場合にも、プリペイメントを保留する場合があると考えられる。この効果をモデルに取り込むことができれば、富の水準に応じて返済行動が異なる点をさらに詳しく表現できることが期待できる。具体的には、最大化すべき目的関数に富の水準に応じてペナルティを課した場合のプリペイメント行動への影響なども観察できる。

5　数値実験

本論文で提案したモデルに基づく期待効用最大化問題を解くことにより、ある債務者の現時点でのローン残高および契約固定ローン金利に対する最適な返済行動を求めることが出来る。具体的には、現時点でのローン残高水準と金利の様々な組み合わせに対する現時点での最適返済行動を求め、それを（後で示す図4のような）「最適返済行動マップ」という形で諸条件と最適返済行動の関係を分かりやすく示すことによって、債務者のプリペイメント戦略に対する指針を与えることが

[10] 将来の借換機会を考えないということは、金利に確率的な構造を入れても評価しない。このことから静的なモデルと呼んだ。この場合、部分返済が頻繁に起こり、モーゲージャーの富を留保しておくという状況が現れない。

できると考える。

最適返済行動は、理論的には前節論じたベルマン原理の枠組みで導出が可能である。しかしながら、プリペイメントを行ったときの値関数を求める作用素 $\mathcal{M}$ が複雑な形をしているため、ベルマン原理に基づく最適解の導出アルゴリズムも極めて複雑になる。

この節では、大まかに提案したモデルが計算可能であり、また得られる結果に対する考察が納得できるものかどうかを確認できればよいと考えて、以下のような単純な設定および手法を用いて数値実験を行うことにする。まず、連続時間モデルを適当な離散時間モデルに置き換えるとともに、プリペイメントは満期前に一度だけ可能であるという制約を与え[11]、さらに部分返済はローン残高の10%、20%、…、90%、100%という10% 刻みの割合でのみ可能とすることで、一度のプリペイメントを含む返済戦略全体を有限集合とする。

また、唯一のリスク要因である市場の無リスク金利については、当初のイールドカーブを

$$f(0,t)=0.04+0.0005t$$

で与えて、さらに短期金利$r(t)$が

$$dr(t)=0.1\,(0.02-r(t))\,dt+0.01dW_t$$

という平均回帰型モデル（いわゆるHull-White モデル）に従うと仮定する。

数値計算は上記のモデルに対する単純２項ツリーを与え、ツリー上のノード一つ一つにそのときの金利に対応するローンの残高や契約金利を所与として、期待効用の計算を行うというアプローチを用いた。

このように計算上の簡便性を優先させたため、今回の数値実験で考える設定は、実際のローン債務者や住宅ローンの商品性の平均像とは乖離しているが、ローン残高と金利の組み合わせによって「何もしない（プリペイメントしない）」「部分返済（一括返済を含む）」「借換」の３種類のうちどれが最適な行動になるかを大まかにつかむという目的は果たしていると言える。

数値実験のためのその他の統一条件は以下のように設定した。

- ローン満期は T =10年とし、通常の返済は１年ごととする
- 市場金利と借換金利の差はない。すなわち $g(t)\equiv 0$ とする。
- 債務者の初期の富は $Y(0)=1$ 千万円、純収入 $a(t)\equiv 4$ 百万円（時間によらず一定）と仮定する。
- 債務者の目的関数は $U(x)=x$ とする。すなわち、当初予定されていたローンの完済時点における富の期待値の最大化問題を考える。
- 借換コストの固定部分および残高比例部分をそれぞれ K_r =11万円、k_r =0.5%とし、部分返済コストは K_p =10万円とする。

まず、現時点での借換金利が借換時の残高等に

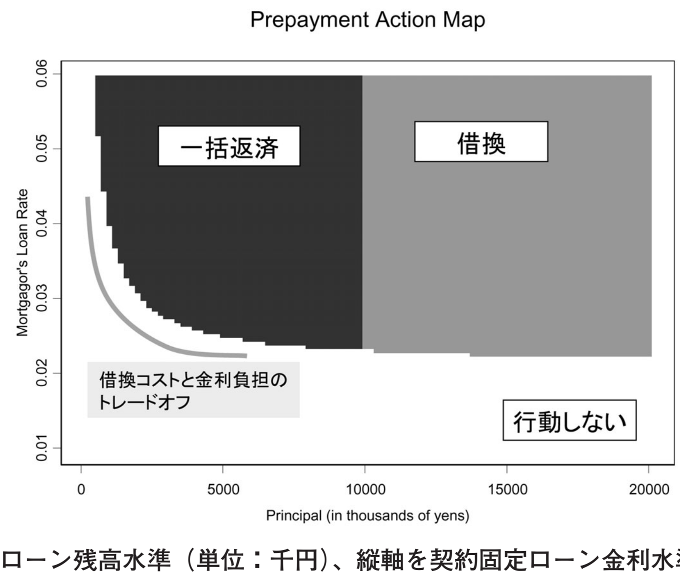

図４　横軸をローン残高水準（単位：千円）、縦軸を契約固定ローン金利水準とする平面上における最適返済行動（現時点の借換金利を２％と仮定）

[11] 本来は何度もプリペイメントが可能な状況を考えているが、現在の返済行動が将来の返済行動と関係してくるため、複数回のプリペイメントを許すと返済戦略の集合の要素数が非常に多くなり、総当たりを行う際の計算負荷が非常に大きくなる。そこで今回は、プリペイメントが満期前に一度だけ可能という強い制約を与えることで、総当たり比較が短時間で可能とした。一般的な場合の効率的な計算アルゴリズムの導入は今後の課題である。

よらず一律２％であるとして、債務者のローン残高水準と現在契約中の固定ローン金利の水準の組み合わせに対する現時点での最適返済行動を求めた。横軸をローン残高水準、縦軸を契約固定ローン金利水準とする平面上で、各点における最適返済行動を可視化したものが図４である。

図４からは、ローン残高および契約金利に組み合わせによるその時点の最適返済行動が３つの領域に分かれている様子がうかがえる。まず、ローン残高がある程度以上あり、２％よりもある程度高い契約金利を抱えている債務者にとっては、即時プリペイメントすることが最適であるということが示されている。しかし、債務者の当初の富である１千万円を基準として、ローン残高が１千万円より低ければ借換せずに一括してプリペイメント（全額返済する場合も部分返済の範疇と考える）するのが最適であり、逆にローン残高が１千万円より高ければ借換するのが最適であるという興味深い結果となっている。

想定している債務者は比較的富をもっている設定なので、ローン残高が少なければ借換コストを負担するよりは、一括返済できるほど余裕があれば一括返済した方が合理的であるという見方を表している。一方、保有する富を用いての一括返済が難しいほどローン残高が残っている場合は、多少目先のコストを負担しても将来の金利負担を減らすために借換を選択するのが賢明であると解釈できる。

また、ローン残高が低く契約ローン金利が３％前後において、一括返済の領域と（プリペイメント）行動しない領域との境界の形状は、借換コストと金利負担のトレードオフの関係が反映されていると考えられる。

全体的には、現実的な感覚と整合的な結果だと考えられる。

また、図５は、K_p =10万円としている部分返済コストを大きくしたり小さくしたりした場合の最適返済行動の変化を観察したものである。部分返済コストを大きくしていくと、部分返済に対する魅力度が相対的に低くなるため、ローン残高が低い場合でも一括返済（部分返済）よりは借換が選択されることになる。ただし、プリペイメントをするかどうかの境界は変化しない。

一方、部分返済コストを小さくしていくと、借換金利と契約ローン金利の差がそれほど大きくない状態であれば、借換が選択されていた領域も一括返済の方が選択されていく様子が観測される。

次に、契約時のローン金利が３％固定である債務者を想定して、現時点のローン残高と市場金利（借換金利）の水準の組み合わせに対する最適返済行動を求めた。結果は図６のようになる。市場金利が２％以下に下がっているところではローン残高がある程度多い場合には借換が最適行動である状況が確認できる。また、市場金利が２％より高い状況においては、ローン残高が少ない場合には何もせず、ローン残高が250万円程度から１千万円程度であれば一括返済を行い、ローン残高が１千万円を超えた部分では、富の制約のため一括

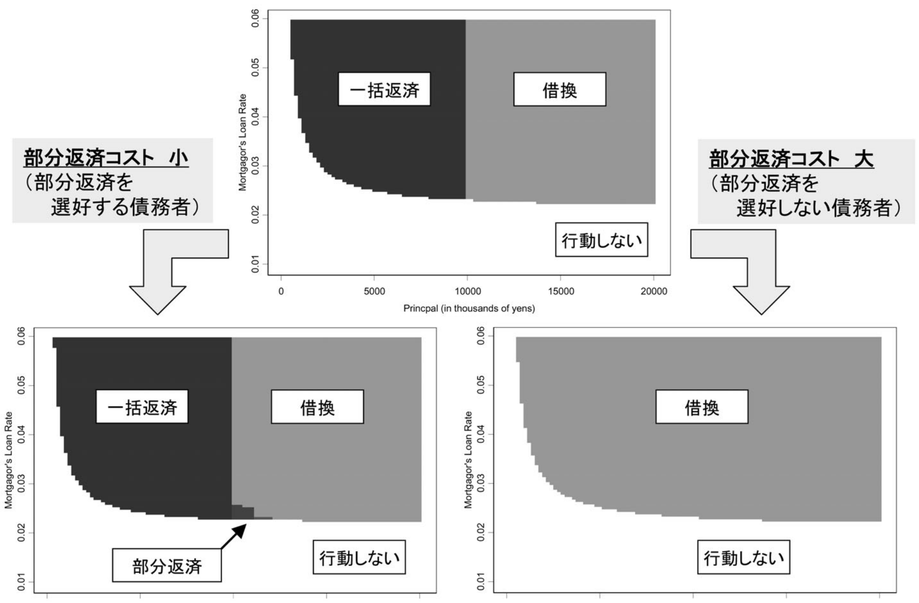

図５　横軸をローン残高水準（単位：千円）、縦軸を契約固定ローン金利水準とする平面上における最適返済行動（現時点の借換金利を２％と仮定）

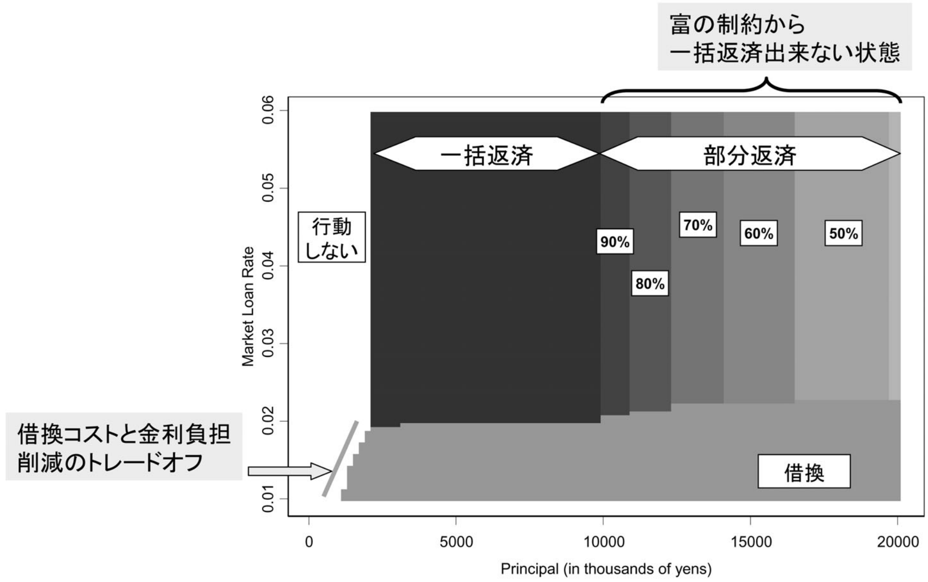

図６　横軸をローン残高水準（単位：千円）、縦軸を市場金利（借換金利）とする平面上における最適返済行動（現時点の債務者の契約金利を３％と仮定）

返済はできないが、可能な範囲で部分返済を実施する状況が最適であるということが示されており、興味深い。

また、ローン残高が低く市場金利が２％より低い状況において、借換の領域と（プリペイメント）行動しない領域との境界の形状は、借換コストと金利負担のトレードオフの関係が反映されていると考えられる。

いずれにしても、現実的な感覚とあまりズレがない結果だと考えられる。

6　まとめと今後の課題

本稿では、住宅ローンのプリペイメント問題を、モーゲージャーの立場で「借換」と「部分返済」の二種類のプリペイメントを考慮する最適プリペイメント問題として考えた。具体的には、連続時間上で固定金利の元利均等返済型住宅ローンの借り手が、モーゲージャーの当初ローンの返済終了時点における富に対する期待効用を最大化するという観点から、（借換時点を求める）最適停止問題と（部分返済時点と部分返済する金額を求める）インパルスコントロールの混合問題として定式化した。その問題を解くためのアプローチとして、期待効用最大化問題に対する値関数がベルマン原理を満たすことを数学的に証明した。これによって、値関数が満たすべきQVIが導出され、値関数が滑らかであるという仮定の下でそのQVIの解が元の最適化問題の解になることを示した。

さらに、連続時間モデルを適当な離散時間モデルに置き換えて返済戦略全体を有限集合とし、またプリペイメントの機会を１回に制限するなどの強い制約の下での数値実験ではあるが、ローン残高と金利の組み合わせによって「何もしない（プリペイメントしない）」「部分返済（一括返済を含む）」「借換」の３種類のうちどれが最適な行動になるかを可視化した。この研究はまだ萌芽的なものではあるが、金利リスクを適切にマネジメントしつつ個人個人の特殊事情を反映させた住宅ローン返済計画のアドバイスなどへの応用が期待される。

今後は粘性解の存在を正当化してモデルの理論的背景を完成させるとともに、より現実的な目的関数や制約条件を考慮した最大化問題を設定し、それを数値的に効率的に解く方法を研究していきたい。

参考文献

Bielecki, T. R. and S. R. Pliska (2000), “Risk sensitive asset managemant with transaction costs,” *Finance and Stochastics*, 4, 1-31

Bielecki, T. R., J-P. Chancelier, S. R. Pliska and A. Sulem (2003), “Risk sensitive portfolio optimization with transaction costs, ”*Preprint*.

Buckley, I. R. C. and R. Korn (1998) “Optimal index tracking under transaction costs and impulse control,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance* , 1(3), 315-330

Korn, R. (1998), “Portfolio optimization with strictly positive transaction costs and impulse control,” *Finance and Stochastics*, 2, 85-144.

Kushner, H. J. and P. Dupuis(2000), “Numerical methods for stochastic control problems in continuous time," *Springer*.

Nagai, H. (2004) "A family of stopping problems of certain multiplicative functionals and optimal investment with transaction costs," *Working Paper*

Nakagawa, H., and T. Shouda, (2004), "Valuation of Mortgage-Backed Securities Based on Unobservable Prepayment Costs," *Advances in Mathematical Economics*, 6, 123-147.

Nakagawa, H., and T. Shouda, (2004), "Analyses of Mortgage-Backed Securities Based on Unobservable Prepayment Cost Processes," *Asia-Pacific Financial Markets* 11, 233-266.

Øksendal, B. (2003), "Stochastic Diflerential Equations, 6th edition," Springer-Verlag.

Øksendal, B. and A. Sulem, (2005), "Applied Stochastic Control of Jump Diffusions," Springer-Verlag.

Pliska, S. R. (2004), "Mortgage Valuation and Optimal Re･nancing," *Working Paper*.

Pliska, S. R. (2005), "Optimal Mortgage Refinancing with Endogenous Mortgage Rates: an Intensity Based, Equilibrium Approach," *Working Paper*.

Pliska, S. R. and K. Suzuki (2004), "Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs," *Quantitative Finance*, 4, 233-243

Schwartz, E. S. and W. N. Torous (1989), "Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities," *Journal of Finance*, 44, 375-392.

Stanton, R. (1995), "Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities," *Review of Financial Studies*, 8, 677-708

正田智昭・中川秀敏（2002)、"確率的なプリペイメント・コストに基づくMBSの評価、" MTECジャーナル、第14号、75-97.

川口宗紀・中川秀敏（2006)、"インパルスコントロールを用いた住宅ローン・プリペイメントモデル、" MTECジャーナル、第18号、103-122.

杉村徹（2003)、"住宅ローンのプリペイメント・モデルと実証分析：返済タイプ別モデル・アプローチ、" ジャフィージャーナル2003「金融工学と資本市場の計量分析」、115-148.

中川秀敏（2004)、"ローン規模に対するペナルティを伴う効用最適型プリペイメント・モデルについて、" MTEC ジャーナル、第16号、3-20.

野崎真利（2005)、"住宅金融公庫MBSの評価、" MTECジャーナル、第17号、63-82.