特集 学会賞

多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル*

枇々木規雄** ・小守林克哉*** ・豊田　暢子

〈キーワード〉

多期間最適化　　ライフサイクルモデル　　フィナンシャルコンサルティング

〈要　約〉

個人顧客へのフィナンシャルコンサルティングを行うためのツール開発に向けた試みとして、世帯の属性やライフサイクルを考慮した最適な投資戦略や生命保険・損害保険の加入保険金額を決定するモデルの構築を行う。具体的には、生命保険と損害保険が世帯の資産形成に与える経済的効果について明確にした上で、世帯がライフサイクルに対応した様々なリスクをヘッジして、退職時までに安定した資産形成を行うための最適投資戦略と、生命保険と損害保険の最適な加入保険金額を同時に決定するためのモデルを、シミュレーション型多期間最適化手法を用いて構築する。

1　はじめに

個人の資産形成アドバイスを行うための試みとして、世帯の属性やライフサイクルを考慮した最適な投資戦略や生命保険・損害保険の加入保険金額を決定するモデルの構築を行う。具体的には、世帯がライフサイクルに対応した様々なリスクをヘッジして、退職時までに安定した資産形成を行うための最適投資戦略と、生命保険と損害保険の最適な加入保険金額を同時に決定するためのモデルを、シミュレーション型多期間最適化手法を用いて構築する。

2　モデルの設定

2.1　世帯

世帯とは１人の世帯主と複数の家族からなる集団と定義する。世帯の保有資産は、有価証券などの金融資産と家屋や耐久消費財からなる非金融資産の２種類で形成されるものとし、時点tにおける金融資産を$W_{1,t}$、非金融資産を$W_{2,t}$と表記する。世帯の収入は、世帯主の賃金収入m_tと保有する金融資産$W_{1,t}$からの投資収益とする。消費は、生活のための消費$C_{1,t}$と、非金融資産の購入、すなわち住居、家財の購入や補修のための費用$C_{2,t}$の２種類に分けて考える。

以上の設定のもと、世帯は、収入をもとに消費を行いながら生活をする。ただし、世帯には、①世帯主の死亡事故と②火災事故の２つのリスクが存在する。前者が発生するとその時点以降の賃金収入m_tが途絶え、後者が発生すると保有する非金融資産$W_{2,t}$の一定割合αが毀損し、その復旧のために突発的な支出が生じると仮定する。したがって、世帯は保有する金融資産をリスク資産や無リスク資産に投資することの他に、生命保険や損害保険を購入することによって、これらのリスクをヘッジする。世帯主の収入関数m_tと世帯の消費関数$C_{1,t}$, $C_{2,t}$は時間の関数として外生的に与える。

2.2　目的関数

現時点を$t=0$として、世帯は最終的に世帯主

---

* 本論文は要約論文。正式掲載誌は『日本保険・年金リスク学会誌（2005)、Vol.1, No.1, p45-68』

** 慶應義塾大学理工学部管理工学科

*** 財団法人金融情報システムセンター

の定年時$t=T$における金融資産の保有額$W_{1,T}$に関する条件付きバリュー・アット・リスク（CVaR）を評価関数（目的関数）として金融商品の選択を行う。

これは、確率水準β（例：$\beta=0.95$）に対し、満期時点の金融資産額がβ-VaR（$\equiv V_\beta$）を下回るという条件下での金融資産額の期待値をリスクと定義する。したがって、⑴式に示すCVaRの最大化問題として定式化を行う。

$$\mathrm{CVaR}_\beta=V_\beta-\frac{1}{1-\beta}\cdot E[q] \tag{1}$$

$$q\equiv\{V_\beta-W_{1,T}\}^+ \tag{2}$$

2.3　投資資産

無リスク資産とn個のリスク資産に投資すると仮定する。無リスク資産の時点t（$=0,1,2,\cdots,T-1$）における無リスク金利をr_tと表し、時点tから$t+1$の期間で一定とする。一方、j（$=1,2,\cdots,n$）番目のリスク資産の時点t（$=0,1,2,\cdots,T$）における価格をρ_{jt}と表す。このとき時点tにおける収益率R_{jt}は⑶式で定義される。

$$R_{jt}=\frac{\rho_{jt}}{\rho_{j,t-1}}-1,\ (t=1,...,T) \tag{3}$$

数値計算においては無リスク金利r_tは時刻によらず一定、リスク資産の収益率R_{jt}は正規分布$N(\mu,\Sigma)$に従うと仮定する。R_{jt}からランダムサンプルを生成し、価格（ρ_{jt}）を計算する。

2.4　生命保険

本モデルでは、世帯主を被保険者とする満期時点Tの定期死亡保険を考える。世帯は生命保険に加入すると、定年時点までに世帯主が死亡した場合に保険金を受け取ることができる。

満期時点Tの定期死亡保険の予定利率をg_1とすると、収支相当の原則によって保険料収入現価1単位とそれに対応する保険金額θ_1の関係は⑷式で表現される。

$$1=\sum_{t=1}^{T}\frac{\theta_1\lambda_{1,t}}{(1+g_1)^t}\text{、すなわち、}\theta_1=\left\{\sum_{=1}^{T}\frac{\lambda_{1,t}}{(1+g_1)^t}\right\}^{-1} \tag{4}$$

ここで、$\lambda_{1,t}$は時点0で生存している人が、時点tで死亡する確率を表す。

また、この保険の平準払い保険料は、保険料はその時点で生存している被保険者のみが支払うことを考慮して、⑸式で表現される。

$$y_{f2}=\left(\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1-\sum_{i=0}^{t}\lambda_{1,t}}{(1+g_1)^t}\right)^{-1} \tag{5}$$

2.5　損害保険

本モデルでは、火災事故が発生して家屋などの非金融資産が毀損した場合には、復旧のため毀損額と同額の支出が発生するものと仮定する。このようなリスクに対するヘッジ手段として、世帯は１年満期の火災保険に加入すると考える。

１年満期の火災保険の予定利率をg_2とすると、収支相当の原則によって保険料収入現価１単位とそれに対応する保険金額θ_2の関係は⑹式で表現される。

$$1=\frac{\theta_2\lambda_2}{1+g_2}\text{、すなわち、}\theta_2=\frac{1+g_2}{\lambda_2} \tag{6}$$

ここで、λ_2は火災事故が発生する確率を表し、時点tによらず一定とする。この保険は１年更新であるため、保険料と収入現価は一致する。

$$y_F=1 \tag{7}$$

3　モデルの定式化

上記仮定のもと、時点t（$=1,\cdots,T-1$）における世帯のキャッシュ・イン・フローは賃金、生命保険金、損害保険金であり、キャッシュ・アウト・フローは消費、生命保険料、損害保険料、火災による損失額であるため、世帯のキャッシュフロー$D_t^{(i)}$は、次のように表現できる。

$$\begin{aligned}D_t^{(i)}=&\tau_{3,t}^{(i)}m_t^{(i)}-\left(C_{1,t}^{(i)}+C_{2,t}^{(i)}\right)-y_{f2}\tau_{3,t}^{(i)}u_L-y_Fu_{F,t}\\&+\tau_{1,t}^{(i)}\theta_1u_L+\tau_{2,t}^{(i)}\theta_2u_{F,t-1}-\tau_{2,t}^{(i)}W_{2,t-1}^{(i)}\alpha(1-\gamma)\end{aligned} \tag{8}$$

ただし、u_Lは0時点で加入する死亡保険の単位数、$u_{F,t}$はt時点で加入する１年満期火災保険の単位数、γは非金融資産の償却率、添え字のi（$=1,2,\cdots,I$）はシミュレーションパスを表している。ここで、t時点の危険資産jへの投資単位数を$z_{j,t}$、無リスク資産の投資単位数をv_tと表現すると、世帯の最適化問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned}\max_{\{z_{j,t},u_L,u_{F,t}\}}\quad & V_\beta-\frac{1}{(1-\beta)I}\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\\ \text{subject to}\quad & \sum_{j=1}^{n}p_{jt}^{(i)}z_{j,t-1}+(1+r_{t-1}^{(i)})v_{t-1}^{(i)}+D_t^{(i)}\\ &=\sum_{j=1}^{n}p_{jt}^{(i)}z_{jt}+v_t^{(i)},\ \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}W_{1,T}^{(i)}\geq W_E\\ &W_{1,T}^{(i)}-V_\beta+q^{(i)}\geq 0,\ (i=1,\cdots,I)\end{aligned}$$

ただし、W_Eは$W_{1,T}$の期待値の下限であり、外生的に与えられる。また、パラメータτは以下の通りである。

$$\begin{cases}\tau_{1,t}^{(i)}\text{：世帯主死亡時に1、それ以外は0}\\ \tau_{2,t}^{(i)}\text{：火災事故発生時に1、それ以外は0}\\ \tau_{3,t}^{(i)}\text{：世帯主生存時に1、死亡時以降は0}\end{cases}$$

4　数値計算例

4.1　基本パラメータによる最適解の特性分析

表１のような基本パラメータを設定し、世帯主の年齢毎に最適戦略を導出した。ただし、制約条件として、定年時点における金融資産期待値水準 W_E を、保有金融資産の期待収益率を μ_W=10%として、

$$W_E = W_{1,0} \times (1 + \mu_W)^T$$

と設定した。

このとき、世帯主の年齢ごとに現時点 $t = 0$ における最適なリスク資産投資金額、最適な保険加入額を計算した結果をまとめたものを図１に示す。例えば、世帯主の年齢が50歳のとき、$t = 0$ の最適リスク資産投資額は514万円、最適生命保険加入額は5,362万円、最適火災保険加入額は1,040万円である。

この図より、年齢が増加するにつれて生命保険の最適保険金額は減少することや、火災保険の最適保険金額は年齢に関わらず一定であること、リスク資産の投資戦略は、年齢が増加するにつれて最適投資金額を減少させることなどの結果を確認することができる。

表１　パラメータ設定

パラメータ	設定値
リスク資産の数	$n = 1$
世帯主定年の年齢	60歳：T=60－世帯主の現在年齢
リスク資産収益率の期待値	$\mu = 0.1$
リスク資産収益率の標準偏差	$\sigma = 0.2$
無リスク金利	$r = 0.04$
死亡事故発生率	「生保標準生命表1996（死亡保険用）男」を用いて λ_{1t} を推計
火災事故発生率	$\lambda_2 = 0.005$
死亡保険の予定利率	$g_1 = 0.05$
火災保険の予定利率	$g_2 = 0.05$
生命保険の保険料支払い方法	平準払い：$f_1 = 0$
賃金収入（万円）	$m_t = 12.5 \times t + 500$
消費支出（万円）うち、 非金融資産購入支出（万円）	$C_t = C_{1t} + C_{2t} = 12.5 \times t + 425$ $C_{2t} = 40 \times (1 + 0.01)^{t-1}$
金融資産の初期保有額（万円）	$W_{1,0} = 1,000$
非金融資産の保有額（万円）	$W_{2,t} = 1,000 \times (1 + 0.01)^t$
非金融資産の初期保有額（万円）	$W_{2,0} = 1,000$
非金融資産の償却率	$\gamma = 0.03$
火災事故による非金融資産損害率	$\alpha = 1$
無リスク資産の下限値	$L_{v,t} = -1,000$
CVaR の確率水準	$\beta = 0.8$

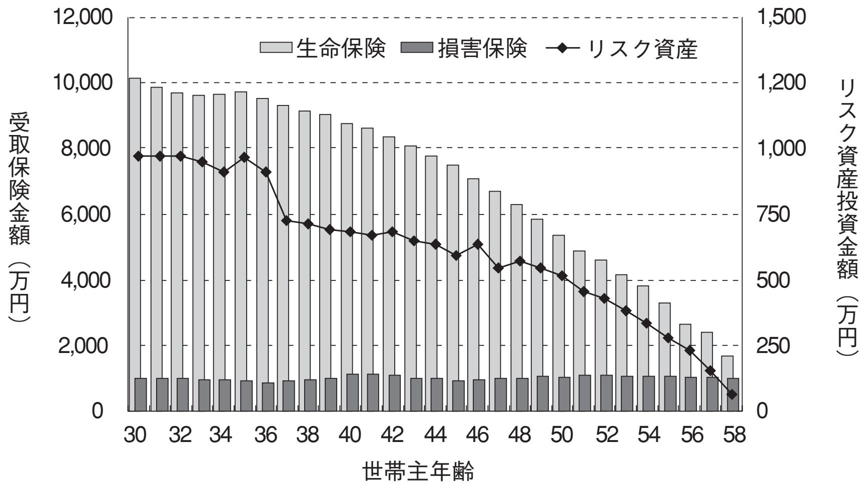

図１　世帯主の年齢と最適戦略

4.2　実務への適用事例

本モデルの実務への適用を視野に入れ、より現実的なコンサルティングツールとしての使用方法を検討する。そのために表2に示すような属性の異なる3世帯に対して本モデルを用いたフィナンシャルコンサルティングを行うことを考える。

モデルのインプットであるキャッシュフロー表を作成するために、世帯の賃金収入は就労者の年齢と職種によって異なるものと考え、厚生労働省（2003）の「賃金構造基本統計調査（平成15年）」をもとに作成した。また、消費支出については、総務省（2000）の「全国消費実態調査（平成11年）」から世帯の人数および収入別の平均支出額を、文部科学省（2003a, 2003b）の「こどもの学習費調査（平成14年）」と「学生生活調査（平成14年）」から教育機関の種別による平均的な教育費を算出することで算出した。

このようにして計算した各世帯の最適戦略を、図2、3、4に示す。

5　おわりに

本研究ではシミュレーション型多期間最適化手法を用いて、世帯に対する資産形成モデルを構築した。まず、世帯が直面するリスクとして世帯主の死亡事故、火災事故、インフレを考え、それぞれのリスクに対するヘッジ機能を有する金融商品として生命保険、火災保険、リスク資産をモデル化した。その上で、世帯がこれらのライフサイク

表2　世帯の属性とライフイベント予定

項目		A 世帯	B 世帯	C 世帯
家族構成（年齢）	世帯主	30 歳		
	配偶者	28 歳		
	第一子	0 歳		
	第二子	−	3 年後誕生予定	−
職　業	世帯主	地方公務員	金融機関勤務	開業医
	配偶者	専業主婦		
子供の教育	小中高	公立校	私立校	私立校
	大学 その他	国立大学（下宿通学）	私立大学（自宅通学） 結婚資金も援助	医学部（自宅通学）
現在の住居	住宅タイプ	公務員官舎	マンション	一戸建（兼診療所）
	家賃（月額）	25,000 円	200,000 円	420,000 円
	居住地域	地方都市	東京都心	東京郊外
住宅購入予定	購入時期	世帯主40 歳時		
	住宅タイプ	一戸建	マンション	一戸建（兼診療所）
	購入金額	3,000 万円	5,000 万円	10,000 万円
	頭金の金額	1,000 万円	2,000 万円	3,000 万円
	ローン金利	6% 固定		
	借入期間	20 年		

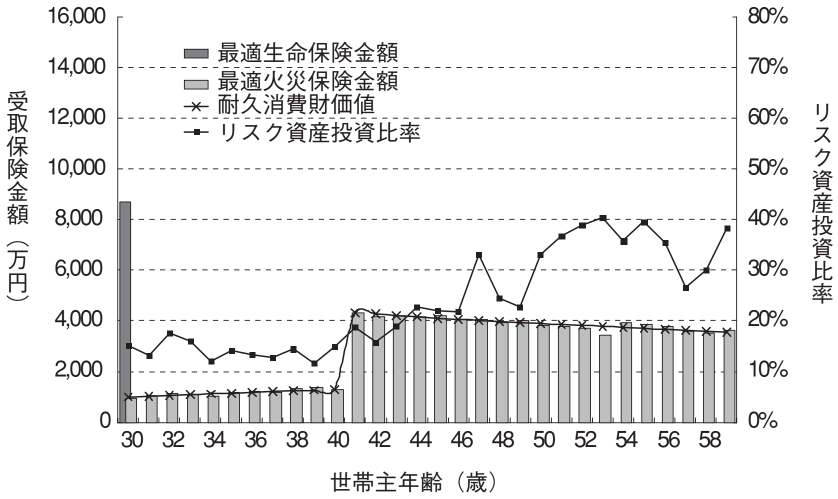

図2　A 世帯における最適戦略の推移

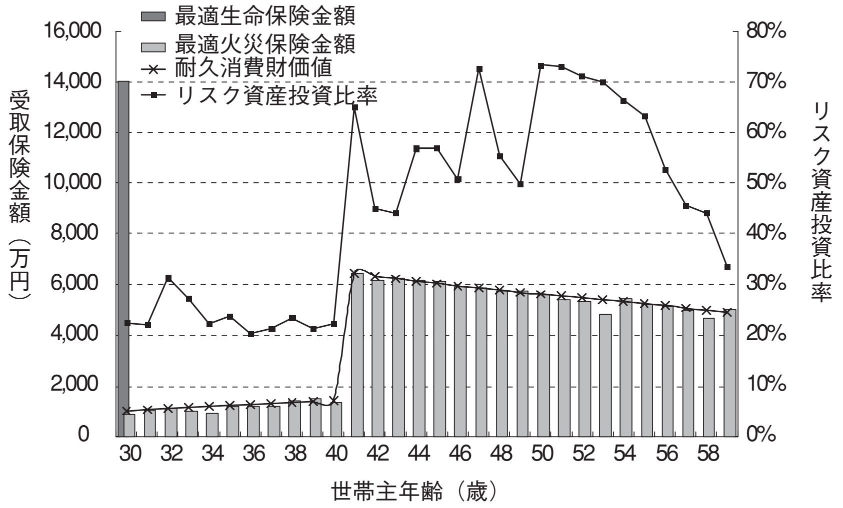

図3　世帯における最適戦略の推移

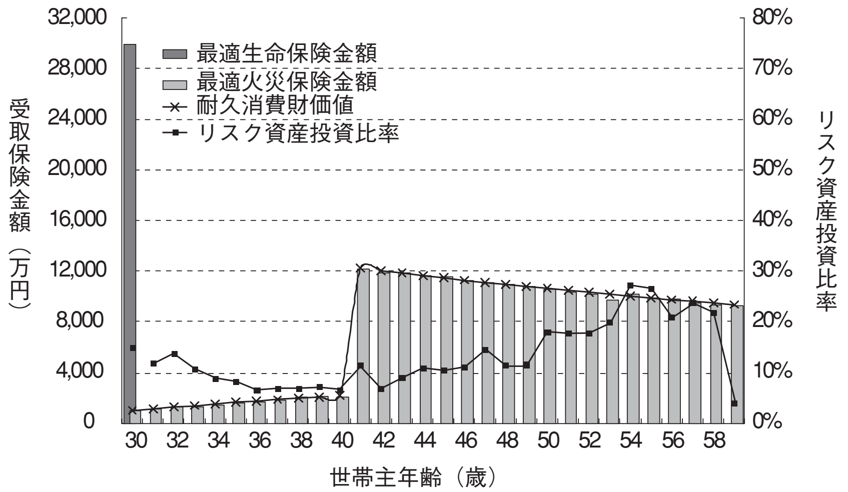

図4　C 世帯における最適戦略の推移

ルに対応した様々なリスクをヘッジして、退職時までに安定した資産形成を行うための最適投資戦略と、生命保険と損害保険の最適な加入保険金額を同時に決定するためのモデルの構築を試みた。数値計算例では、基本パラメータによる解の傾向を調べるとともに、3つのモデル世帯による活用事例を検討し、モデルの有用性を示すことができた。

今回の研究は、多期間最適化手法を個人の資産形成モデルに適用した試みであり、近年重要性が高まっている個人に対するフィナンシャルコンサルティングツールとしての活用可能性を示すものである。今後、このようなモデルが、金融機関の顧客サービスの一環として、実務においても幅広く活用されていくことが期待される。

参考文献

[1] 金融広報中央委員会(2003)、「家計の金融資産に関する世論調査」http://www.saveinfo.or.jp/kinyu/yoron/2003/03yoron.html

[2] 厚生労働省 (2003)、「賃金構造基本統計調査(平成15年)」、http://wwwdbtk.mhlw.go.jp/toukei/kouhyo/indexk-roudou.html

[3] 社団法人日本アクチュアリー会 (1996)、「生保標準生命表 (1996) の作成過程」.

[4] 総務省 (2000)、「全国消費実態調査 (平成11年)」、http://www.stat.go.jp/data/zensho/1999/021index.htm

[5] 文部科学省 (2003)、「こどもの学習費調査(平成14年)」、http://www.mext.go.jp/b menu/toukei/001/006/03121101.htm

[6] 文部科学省(2003)、「学生生活調査(平成14年)」、http://www.mext.go.jp/b menu/houdou/16/04/

04040702.htm
[7] 枇々木規雄（2001a）、「金融工学と最適化」、朝倉書店.
[8] 枇々木規雄（2001b）、「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」、*Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, No.2, pp.*169-193.
[9] 枇々木規雄（2001c）、最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル、高橋一編、ジャフィー・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開、*pp.*89-119.
[10] 吉田　靖、山田泰之、枇々木規雄（2002）、「家計の金融資産配分問題に対する多期間最適化モデル」、慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート、*No.*02-003.
[11] Bodie, Z. and D.B. Crane (1997),"Personal Investing:Advice, Theory, and Evidence", *Financial Analyst Journal,* Vol.53, No.6, pp.13—23.
[12] Bodie, Z., R.C. Merton and W.Samuelson (1992), "Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model", *Journal of Economic Dynamics and Control,* Vol.16, No.3-4, pp.427-449.
[13] Merton, R.C. (1969), "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics,* Vol.51, No.3, pp.247-257.
[14] Merton, R.C. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory,* Vol.3, No.4, pp.373-413.
[15] Merton, R.C. (1992), *Continuous-Time Finance, Blackwell.*
[16] Rockafellar R,T and S.Uryasev (2000) "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk,* Vol.2, No.3, pp.21-41.
[17] Samuelson, P.A. (1969), "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", *Review of Economics and Statistics,* Vol.51, No.3, pp.239-246.
[18] Ziemba, W.T. and J.M. Mulvey (1998), "Worldwide Asset and Liability Modeling", Cambridge University Press.