査読付き研究ノート

一括投資と積立投資に活用できる法則（ルール）

Useful Rules for Lump Sum and Installment Investments

慶應義塾大学 理工学部　枇々木 規雄 / *Norio HIBIKI*

キーワード（Keywords）

積立投資（Installment Investment），126 の法則（Rule of 126），
資産運用（Asset Management）

Abstract

「人生100年時代」において，安定的に資産形成を行うために，長期・積立・分散投資の重要性が増している．長期投資のメリットは時間を味方に付けることによって複利効果を享受できることにある．その複利効果の威力を理解するのに重要な法則（ルール）として，72の法則が知られている．これは一括に投資を行うという前提のもとで，投資金額が元本の2倍になる年数と利率の組み合わせを簡単に求めることができる法則で，具体的には「年数×利率=72」（利率はパーセント表示）が成り立つという法則である．それに対して，枇々木（2021）は積立投資の場合には，「年数×利率=126」が成り立つ126の法則を提唱している．これらの法則は，「将来の資産額が投資元本の何倍になるか」が「年数×利率」と「ほぼ」一対一の関係にあるという法則である．本研究では，積立投資に活用できる法則に対して，連続複利・連続積立の概念を導入することによって，「ほぼ」ではなく，厳密に（一意に）ルール数が決まる（法則が成り立つ）ことを示し，理論的に補強する．また，期初積立と期末積立の違いによる影響を考察し，期初積立の方が安定的に法則が成り立つことを示す．さらに，この法則を一般化し，積立金額が可変の場合，一括投資と積立投資の両方を考慮する場合にも，この法則が成り立つことを示す．

1．はじめに

「人生100年時代」において，安定的に資産形成を行うために，長期・積立・分散投資の重要性が増している．金融庁は我が国の家計における資産形成の促進に向けた政策の一つとして，2014年1月からNISA，さらに2018年1月からつみたてNISAをスタートした．金融庁（2023）によると，2023年6月末時点でNISA口座数は1941万口座，買付額は約33兆円で，そのうち，つみたてNISAの口座数は836万口座，買付額は約3兆6千億円である．つみたてNISAの買付額は全体の約11%に過ぎないが，口座数は年々増加し，NISA全体の約43%を占めている．厚生労働省が私的年金制度として，2002年1月にスタートした確定拠出年金制度の個人型がiDeCo（個人型確定拠出年金）である．2016年には加入者の範囲の拡大，2020年にも加入可能年齢の拡大など，様々な制度改正が行われ，老後資金のための自助努力を支援している．国民年金基金連合会（2023）によると，2012年3月の加入者は約14万人であったが，加入者範囲が拡大された制度改正後の2017年3月末には45万人（2016年3月末は26万人）に増え，2023年9月末での加入者数は約309万人となっている．加入者の掛金額分布・平均（毎月定額拠出）の人数を見ると，1～1.5万円の範囲が約117万人と最も多く，その次は2～2.5万円の範囲で約96万人である[1]．年金拠出額は積立で行われており，NISAとともに積立投資に対

・論文受理日：2023年6月1日
・修正論文受理日：2023年12月3日
・最終受理日：2023年12月11日

[1] 拠出限度額（掛金上限）の影響が出ている．第2号被保険者で公務員，DBのみ・DBと企業型DCに加入している会社員の上限は月額1.2万円，第2号被保険者で会社に企業年金がない場合や第3号被保険者の上限は月額2.3万円である．

するニーズは高まっている．

分散投資のメリットはリスクを小さくできることであり，安定的な資産形成に寄与する．一方，長期投資のメリットは時間を味方に付けることによって複利効果を享受できることにある．その複利効果の威力を理解するのに重要な法則（ルール）として，72の法則が知られている．72の法則は，古くから様々な文献（Brown（1966），Kroopnick（1979），Spitzer and Singh（1999），Smith（2000））で紹介されているだけでなく，金融工学の代表的な教科書（Luenberger, 2014）にも紹介されている．これは，一括に投資を行うという前提のもとで，投資金額が元本の2倍になる年数と利率（利回り）の組み合わせを簡単に求めることができる法則で，具体的には「年数×利率=72」（利率はパーセント表示）が成り立つという法則である．例えば，利率が3%であれば，おおよそ2倍になるには24年かかる（1.03^{24}=2.033）．単利の世界で元本が2倍になるのは「利率×年数=100」で，72（の法則）はそれに比べて小さい数値であり，これが複利効果を表すことになる．「投資する金額を2倍に増やすためには，どのくらいの利率で，何年間投資する必要があるのか？」ということが簡単にわかるので，投資の複利効果や資産形成をより身近に感じることができる．

ところで，72の法則は rule of thumb（概算法，経験則：以降，RoT）として紹介されることが多い．Whittle *et al.*（2017）は情報の非対称性や複雑さが個人の意思決定を難しくさせるような状況において，RoTが意思決定を可能にしたり，促したりするのに有用であることを述べるとともに，パーソナルファイナンスにおいて存在するRoTに関するエビデンスを評価している．RoTとして，ファイナンスにおける47個のルール（法則）を紹介し，ファイナンシャル・アドバイス／ウェルビーイング／ライフスタイルのサイト，ブログ，出版物での説明における効果や，行動経済学の観点から見た効果，Hoy&Tarterのフレームワークによる分析結果をまとめている．Whittle *et al.*（2017）には資産配分における株式比率を表す「100マイナス年齢ルール」，退職後資金の4%引き出しルールなど，よく知られたRoTが紹介されているが，その中で72の法則のみが，FINRA（Financial Industry Regulatory Authority）が行うThe National Financial Capability Study（NFCS）のState-by-State Surveyや金融リテラシー調査2022年（金融広報中央委員会（2022））において，金融リテラシーを問う問題の中に含まれている．72の法則は明確な数式に基づいた概算法であり，その他のRoTとは異なる特徴を持つと考えられる．そこで，本研究では，72の法則のような明確な数式に基づく概算法に焦点を当てて研究を行う[2]．

72の法則はとてもわかりやすい法則として知られているが，一括投資に活用できる法則である．一方，72の法則に対応する積立投資に対する法則として，枇々木（2021）は定額で積立貯蓄・投資を行うという前提のもとで，126ルール（126の法則）を提案している．筆者の知る限りにおいてであるが，枇々木（2021）が提案するまで積立投資に対するこのようなルールは存在しなかった．これは投資金額が元本の2倍になるには「年数×利率=126」（利率はパーセント表示）が成り立つというルール（法則）である．「126」を定額積立で2倍になるルール数と呼ぶ．例えば，利率が3%であれば，42年間積み立てると，42×3＝126なので，将来の資産額は積立元本額の2倍（積立元本額は将来の資産額の半分）になるというルールである[3]．23歳から65歳まで42年間働くとして，働き始めてすぐに積立投資を始め，平均的に利率3%で投資できれば，おおよそではあるが，積立額は半分で済むと考えられる[4]．単利の世界で，将来の資産額が積立元本額の2倍になるにはおおよそ「利率×年数=200」なので，一括貯蓄・投資と同様に複利効果の大きさがわかる．また，2倍だけでなく，他の倍率に対するルール数（1.5倍の場合には76，3倍の場合には190など）も示している．ただし，この法則は72の法則と同様に，すべて利率は一定と仮定している．投資におけるリスクを考慮していない（無視している）ため，この法則を利用する際にはその点を十分に認識し，平均的な概算法[5]として，この法則を投資計画の立案や投資助言に活用する必要がある．

これらの法則は，「将来の資産額が投資元本の何倍になるか」（倍率）が「年数×利率」と「ほぼ」

---

[2] RoTが個人の意思決定に与える影響は極めて重要な観点であるが，本研究では議論の対象としない．

[3] 毎月の積立金額を1万円とすると，42年間（504カ月）では504万円である．利率3%で，月初積立をすると1010.5万円（約2倍）になる．

[4] 積立貯蓄・投資によって2,000万円を貯めたいと考え，それを年率3%を想定して，504カ月（42年間）に渡って月初に積み立てるならば，毎月の積立額は19,793円である．一方で，126の法則を使うと，積立元本は貯めたい金額の半分の1,000万円なので，毎月の積立額は19,841円（$=\frac{1{,}000\text{ 万円}}{504\text{ カ月}}$万円）となり，ほぼ近似できる．

[5] 一括投資に用いられる平均収益率は「幾何平均収益率」であるが，積立投資に用いられるのは「内部収益率（IRR）」である点に注意が必要である．利率が一定の場合には，幾何平均収益率や内部収益率は，算術平均収益率と一致する．

一対一の関係にあるという法則である．72の法則と126の法則は，それぞれ一括投資，定額の積立投資に対する法則である．ここで「ほぼ」と言ったのは，72や126といった整数に近似しているからではない．年数や利率が異なると，厳密には一つの値（一意）に決まらないという意味である．

一括貯蓄・投資においては「年数×利率」は単利合計であるため，単利の世界では倍率と一対一の関係にあることは自明である．また，複利の世界でも72の法則により，その関係が示されていたが，それ以外は自明ではなかった．枇々木(2021）は積立貯蓄・投資を定額で行うという前提で，初めてその関係を明らかにしたが，72の法則と同様に離散複利において「ほぼ」一対一の関係があることを示しただけである．実務においては離散複利・離散積立を想定するが，本研究では，まずはじめに連続複利・連続積立の概念を導入することによって，「ほぼ」ではなく，厳密に（一意に）ルール数が決まる（法則が成り立つ）ことを示し，理論的に補強する．また，期初積立と期末積立の違いによる影響を考察し，期初積立の方が安定的に法則が成り立つことを示す．さらに，この法則を一般化し，以下の2点について法則が成り立つことを示す．

(1)　積立金額が定額ではなく，可変の場合

実際に積立計画を立てる場合，収入が少ない若いときには積立金額は少ないが，収入の増加とともに徐々に積立金額を増加させることが考えられる．投資信託協会（2020）は，毎月，20代では1万円，30代では1.5万円，40代では2万円，50代では3万円というように，年代別に積立金額を増やしていく前提で積立投資モデルケースのシミュレーションを行っており，このような場合にも法則が成り立てば，かなり現実的な状況にも対応できるようになる．この例の場合，積立元本を2倍にするルール数は153である．40年間にわたる積立元本総額は900万円（=（1+1.5+2+3）×12×10）であり，それを利率3.825％（= 1.53/40）で運用すると，約1800万円になる．20年間（5年ごとに，1, 1.5, 2, 3万円ずつ積立）の場合には，積立元本総額は450万円で，利率7.65％（=1.53/20）で運用すると，約900万円になる．また，この法則は積立金額が可変となる期間の長さが一定でなくても成り立つ．例えば，16年間は1万円，12年間は1.5万円，8年間は2万円，4年間は3万円ずつ，毎月積立をする場合，積立元本を2倍にするルール数は150である．積立元本総額は744万円で，利率3.75％（=1.50/40）で運用すると，約1488万円になる．全期間を20年間にする場合には，それぞれの期間も半分（8, 6, 4, 2年間）にして，利率7.5％（=1.50/20）で運用すれば，積立元本は約2倍になる．

(2)　一括投資と積立投資の両方を考慮する場合

ある程度資金を保有している人が積立を始めるとき，すでに保有している資金を一括投資するとともに積立投資を行って，元本を増やしたいと考える場合もある．すでに投資をしている場合には，その価値で一括投資すると考えればよい．例えば，

> 現在保有している200万円を一括で運用するとともに，これから毎月積立を行い，将来の資産額を2, 000万円にしたい．利率3％で，元本合計の2倍になるように運用したい．これから何年間，いくらずつ積立を行うと，それが達成できるか？

この例の場合，元本合計は1,000万円で積立額の合計は800万円であり，元本合計を2倍にするルール数は106である．積立期間は，106/3=35.33年（424カ月）で，毎月の積立額は800/424=1.887万円である．利率が6％の場合には，106/6=17.67年（212カ月）で，毎月の積立額は800/212=3.774万円となる

上記の場合にも連続複利･連続積立の場合には，「ほぼ」ではなく，厳密にこの法則が成り立つことも示す．さらに，積立額も定額ではなく，可変の場合でも成り立つ．これらの状況に対応することによって，様々な顧客に対して，投資計画の立案を支援することができ，実務的にも貢献できると考えられる．

本研究では，積立投資に関する理論の補強を行い，モデル化を行う際にキャッシュフローの取り扱いを工夫したこと，一括投資と積立投資の両方を含む一般化したモデルも示すなど，学術的な貢献をまとめると，以下の4点になる．

(1)　連続複利・連続積立の場合

一括投資の72の法則の場合には連続複利の概念だけでルール数は一意に決まるが，積立投資の場合には連続積立の概念を含めることによって一意に決めることができることを示した（連続複利だけでは一意に決まらない）．

(2)　期初積立と期末積立の違いによる法則への影響に対する考察

資産の増加倍率を実効利率要因とキャッシュフロー要因に分解し，期初積立の方が安定的に法則が成り立つことを示した．

(3) 積立金額が定額ではなく，可変の場合

可変となる金額をそのまま取り扱うのではな

く，積立追加額として取り扱い，積立金額の変更時点からある将来時点までのキャッシュフロー流列の組み合わせに分解してモデル化し，法則が成り立つことを示した．

(4) 一括投資と積立投資の両方を考慮する場合

一括と積立元本の合計に対する一括投資元本の割合をパラメータとして導入したモデル化を行い，法則が成り立つことを示した．パラメータを割合ではなく，毎回の積立金額とすると，この法則は成り立たないことも示した．

本稿の構成は以下の通りである．2節では，一括投資に対する72の法則と積立投資に対する126の法則を紹介する．また，連続複利・連続積立の概念を導入し，ルール数が一意に決まることを示す．さらに，期初積立と期末積立の違いについても議論する．3節では，積立金額が定額ではなく，可変の場合にも法則が成り立つことを示すとともに，様々なキャッシュフロー・パターンにおける元本に対する倍率とルール数の関係を表す簡便表も示す．4節では，一括投資と積立投資の両方を考慮する場合にも法則が成り立つことを示すとともに，様々な一括投資元本の割合に対する倍率とルール数の関係を表す簡便表も示す．5節では，FP実務での利用に関して考察する．6節では，まとめを示す．

2．72の法則と126の法則

2.1 一括投資に対する72の法則

72の法則とは，投資資産が複利で元本の2倍になるのは，$(1+r)^n=2$を満たす年数nと利率（年率）rの組み合わせで，$nr=0.72$がほぼ成り立つという法則である．$r=0.72/n$をこの式に代入して，$(1+0.72/n)^n$を元本に対する倍率とすると，年数nとその倍率の関係は図1のように描くことができる．図1(a) は年数，図1(b) は利率と倍率の関係を示している．$n=9.1756$（$r=0.0785$）のとき，n年後の金額が元本に対してちょうど2倍になる．他のnの場合にはその大きさによって倍率が少しずれるが，おおよそ2倍であることが確認できる．図1には，72の代わりに，69～71の場合の倍率も示している．図1を見ると，必ずしも利率の水準を考えると，72よりも他の数値の方がよい場合もある．

元本の2倍の場合は72の法則であるが，1.5倍や3倍の場合もそれぞれnrの値はほぼ一定になる．年内の複利回数をmとし，$a=nr$（以降，aをルール値と呼ぶ）とすると，倍率yは

$$y=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn} \quad (1)$$

となる．したがって，ルール値aは

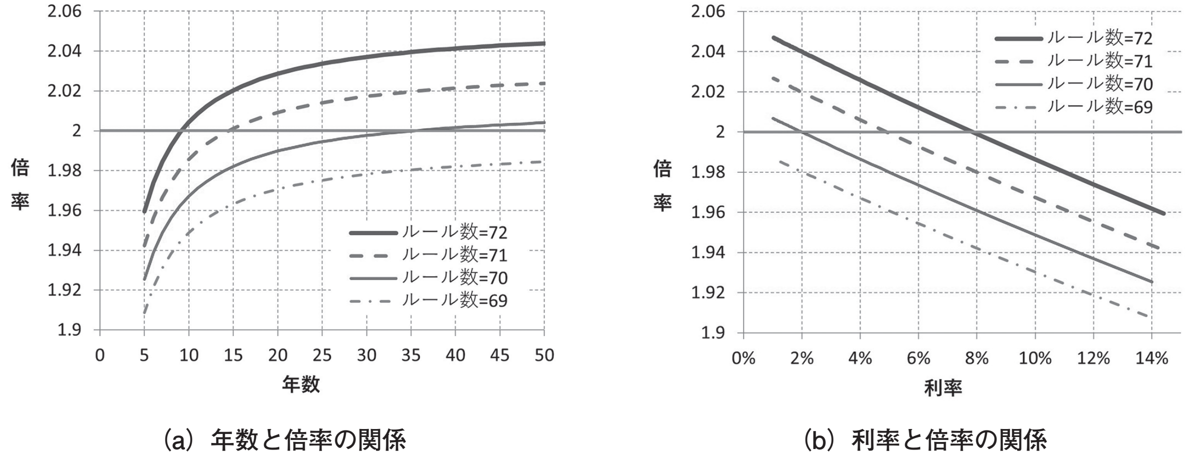
$$a=mn\left(\sqrt[mn]{y}-1\right) \quad (2)$$

と求めることができる．連続複利の場合には，

$$y=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=e^{nr}=e^{a} \quad (3)$$

となり，$a=\ln(y)$である．したがって，連続複利の場合にはルール値は一意に決まる．離散複利におけるいくつかのy, m, nの組み合わせに対するルール値$a\,(y\,;m,n)$と連続複利におけるルール値$a\,(y)$を表1に示す．

mとnの値によって多少異なるが，離散複利の場合でもyに対するルール値$a\,(y\,;m,n)$の値はほぼ同じである．nやmが大きくなるにつれて，aの値は小さくなり，徐々に連続複利の場合のルール数に近い値となる．$y=2$の場合には，69もしくは70に近い値をとることが確認できる[6]．



(a) 年数と倍率の関係　(b) 利率と倍率の関係

図1　一括投資の場合の年数・利率と倍率の関係

[6] Gould and Weil (1974) は，69の法則（rule of 69）を提唱している．

表1　離散複利におけるルール値 $a(y\,;m,n)$ および連続複利におけるルール値 $a(y)$

離散複利							連続複利	
y	$m^{\dagger}$	$n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=40$	$n=50$	y	$m\to\infty$
	1	0.4138	0.4096	0.4082	0.4075	0.4071		
1.5	4	0.4075	0.4065	0.4062	0.4060	0.4059	1.5	0.4055
	12	0.4062	0.4058	0.4057	0.4056	0.4056		
	1	0.7177	0.7053	0.7012	0.6992	0.6980		
2	4	0.6992	0.6962	0.6952	0.6947	0.6943	2	0.6931
	12	0.6952	0.6941	0.6938	0.6936	0.6935		
	1	1.1612	1.1293	1.1190	1.1138	1.1108		
3	4	1.1138	1.1062	1.1037	1.1024	1.1016	3	1.0986
	12	1.1037	1.1011	1.1003	1.0999	1.0996		

† $m=1$: 年複利，$m=4$: 四半期複利，$m=12$: 月複利

2.2　積立投資に対する126の法則

（枇々木（2021））

積立投資は一般に毎期一定額を積み立てていく．そこで，図2に示すように，年数を n，年内の積立回数を m 回として，期初に M を mn 回にわたり積立投資して，満期に S が得られる場合のキャッシュフローを想定しよう．月初に積み立てる場合には，$m=12$ となる．図2においては，期は，$m=12$ ならば月，$m=1$ ならば年になる．ここで利率（年率）は r とする．満期額 S は毎期の積立額 M の満期価値の合計なので，それらは次のように関係づけることができる．

$$S = \left\{\sum_{t=1}^{mn}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{t}\right\}M$$

$$= \left[\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}}\right]M \qquad (4)$$

積み立てた元本の合計は mnM なので，$a=nr$ とすると，満期額 S の積立元本額（合計）mnM に対

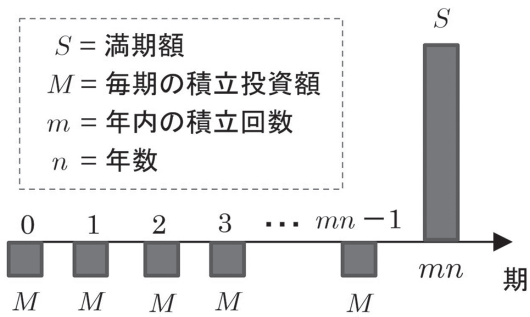


図2　積立投資のキャッシュフロー

する倍率 y は，

$$y = \frac{S}{mnM} = \frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{nr}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{a}{mn}\right) \qquad (5)$$

となる．いくつかの y, m, n の組み合わせに対して，(5) 式からニュートン法を用いて計算した $a(y\,;m,n)$ の値を表2に示す．

表2　y（倍率），m（積立回数），n（年数）に対する $a(y\,;m,n)$ の値

y (倍率)	$m^{\dagger}$ (回数)	$n=10$ (10年)	$n=20$ (20年)	$n=30$ (30年)	$n=40$ (40年)	$n=50$ (50年)
	1	0.7257	0.7438	0.7500	0.7531	0.7550
1.5	4	0.7531	0.7579	0.7595	0.7603	0.7608
	12	0.7595	0.7611	0.7616	0.7619	0.7620
	1	1.2304	1.2436	1.2479	1.2500	1.2513
2	4	1.2500	1.2532	1.2543	1.2548	1.2552
	12	1.2543	1.2554	1.2557	1.2559	1.2560
	1	1.9348	1.9202	1.9150	1.9123	1.9106
3	4	1.9123	1.9081	1.9067	1.9060	1.9055
	12	1.9067	1.9053	1.9048	1.9045	1.9044

† $m=1$: 年初に1回，$m=4$: 四半期ごと (4回)，$m=12$: 毎月初 (12回)

表3　ルール数から倍率yを求める簡便表（$m=12$, $n=40$）

$100a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	1.230	1.237	1.243	1.250	1.257	1.263	1.270	1.277	1.284	1.291
50	1.298	1.305	1.312	1.319	1.326	1.334	1.341	1.348	1.356	1.363
60	1.371	1.378	1.386	1.394	1.401	1.409	1.417	1.425	1.433	1.441
70	1.449	1.457	1.465	1.473	1.482	1.490	1.498	1.507	1.515	1.524
80	1.533	1.541	1.550	1.559	1.568	1.577	1.586	1.595	1.604	1.613
90	1.623	1.632	1.641	1.651	1.660	1.670	1.680	1.689	1.699	1.709
100	1.719	1.729	1.739	1.749	1.760	1.770	1.780	1.791	1.801	1.812
110	1.823	1.833	1.844	1.855	1.866	1.877	1.889	1.900	1.911	1.923
120	1.934	1.946	1.957	1.969	1.981	1.993	2.005	2.017	2.029	2.042
130	2.054	2.066	2.079	2.092	2.104	2.117	2.130	2.143	2.156	2.169
140	2.183	2.196	2.210	2.223	2.237	2.251	2.265	2.279	2.293	2.307
150	2.321	2.336	2.350	2.365	2.380	2.395	2.410	2.425	2.440	2.455
160	2.471	2.486	2.502	2.518	2.533	2.550	2.566	2.582	2.598	2.615
170	2.631	2.648	2.665	2.682	2.699	2.716	2.734	2.751	2.769	2.787
180	2.805	2.823	2.841	2.859	2.878	2.896	2.915	2.934	2.953	2.972
190	2.991	3.011	3.030	3.050	3.070	3.090	3.110	3.130	3.151	3.172
200	3.192	3.213	3.235	3.256	3.277	3.299	3.321	3.343	3.365	3.387

例: 126 (行 120 と 列 6 の交点) の場合の倍率は $y=2.005$ である．

mとnの値によって，$a\,(y\,;m,n)$の値は異なる．$y=2$のとき，$m=1$では，$n=10$と$n=50$のルール値の差は0.0209である一方で，$m=12$では，差は0.0017であり，10分の1以下である．$y=1.5$や$y=3$の場合も同様である．ある倍率yに対しては，特にmが大きくなると，nにかかわらずほぼ同じ値となり，yに対するaの範囲をある程度，決められることがわかる．ルール値aを100倍した値がルール数であり，整数にするために四捨五入すると，$m=12$で$n=30, 40, 50$の場合，それぞれ，76（1.5倍の場合），126（2倍の場合），190（3倍の場合）となる．

ルール数から倍率yを求める簡便表を表3に示す．ただし，この表は年数を40年（$n=40$），年内の積立回数を12回（$m=12$）としたときに，(5) 式を用いて求めた倍率yである．

この表の見方を説明する．例えば，ルール数126に対する倍率yの値を求めたいとしよう．行の120と列の6（$120+6=126$）の交点である2.005がyの値である．年数が40年でなくても，年数と利率からおおよその倍率を求めたいときにもこの表を使うことができる．例えば，「利率5％で毎月初に1万円，20年間にわたって積立を行うといくらになるか？」という問題を考えてみよう．(4) 式に，$r=0.05$, $m=12$, $n=20$, $M=1$を代入すると，$S=412.7$となる．一方，$a=nr=20\times0.05=1$より，ルール数は100であるので，この表から満期額は積立元本240万円の1.719倍になる．計算すると，$240\times1.719=412.56$となり，かなり近似できていることがわかる．

一方で，この表を用いて，倍率からルール数を求めることができる．1.75倍になるルール数を求めたい場合，1.75に近い数値を表の中から見つければよい．そうすると，行の100と列の3の交点が1.749であるので，ルール数は103となる．

2.3　時間換算公式との関連性

72の法則や126の法則を理論付ける手法として，経済性分析（千住他（1986））における時間換算の諸公式を用いている．具体的には，一括投資に関しては終価係数，積立投資に関しては年金終価係数の公式がベースとなっている．これらの公式は表4に示すように，利率r，年数n，年複利回数（年支払い回数）mが与えられたときに，現価P，終価S，年価Mを関連付ける6つの公式群からなる．

千住他（1986）は年複利を想定した$m=1$の場合の公式を示している．また，年価に関しては期末払いを想定しているが，期初払いの場合，終価係数，年金終価係数に関しては$1+\frac{r}{m}$，資本回収係数，減債基金係数については$\frac{1}{1+r/m}$を掛ければよい．

一括投資の場合，終価係数を用いて，利率r（複利回数m）のもとでの投資額Pに対するn年後の価値Sが計算できる．一方で，$\frac{S}{P}$の値を満たすnとrを逆算したい（nとrの組み合わせを求めたい）ときに用いる簡便法が72の法則である．終価係数が$\frac{S}{P}=2$となる式において，両辺の対数を取

表4　時間換算公式（期末払い）

	現価 P を求める	終価 S を求める	年価 M を求める
現価 P から	—	$P \times \underbrace{(1+\frac{r}{m})^{mn}}_{\text{終価係数}} = S$	$P \times \underbrace{\frac{\frac{r}{m}(1+\frac{r}{m})^{mn}}{(1+\frac{r}{m})^{mn}-1}}_{\text{資本回収係数}} = M$
終価 S から	$S \times \underbrace{\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{mn}}}_{\text{現価係数}} = P$	—	$S \times \underbrace{\frac{\frac{r}{m}}{(1+\frac{r}{m})^{mn}-1}}_{\text{減債基金係数}} = M$
年価 M から	$M \times \underbrace{\frac{(1+\frac{r}{m})^{mn}-1}{\frac{r}{m}(1+\frac{r}{m})^{mn}}}_{\text{年金現価係数}} = P$	$M \times \underbrace{\frac{(1+\frac{r}{m})^{mn}-1}{\frac{r}{m}}}_{\text{年金終価係数}} = S$	—

り，テーラー展開すると

$$\ln(2) = mn\ln\left(1+\frac{r}{m}\right) \approx mn\left\{\frac{r}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{m}\right)^2\right\}$$

$$= nr\left(1-\frac{r}{2m}\right) \tag{6}$$

となる．したがって，

$$nr \approx \frac{\ln(2)}{1-r/2m} \tag{7}$$

が得られ，72の法則は（7）式の右辺の値が0.72に近い値となることを示している．

一方で，積立投資の場合も同様に年金終価係数を用いて，毎期の積立額Mに対するn年後の価値Sが計算できる．しかし，年金終価係数は終価係数と異なり，$\frac{S}{M}$の値を満たすnとrを逆算したい場合でも，その積のnrがある値に近くなることはない．ここで，一括投資は$\frac{S}{P}$が元本に対する倍率を表すのに対し，積立投資の場合は$\frac{S}{mnM}$が元本に対する倍率を表すことを利用すると，倍率を表す係数は年金終価係数をmnで除したものになり，分母にnrが表れる．一方で，分子の第1項目は終価係数となるので，倍率を表す係数に対するnrもほぼ一定の値を取る．したがって，これを積立投資においてnとrを逆算したい（nとrの組み合わせを求めたい）ときに簡便法として用いることができ，2倍の場合に相当する法則が126の法則である．

本研究では，以降の節（3節，4節）においても，元本合計に対する終価の比を倍率と定義し，これらの公式を同様の考え方に基づき工夫して用いることによって，積立金額が可変の場合や一括投資と積立投資の両方を含む場合に対しても，ルール値aがほぼ一定の値になる法則を導いていく．

2.4　連続複利・連続積立の場合

2.2節では，ある倍率に対する「年数×利率」（ルール数）は，ほぼ一定になることを示し，近似的に求めている．本節では，この法則に対する理論を補強するために，連続複利のもとで，連続的に積立投資を行うことを想定すると，「年数×利率」（ルール数）が厳密に一意に決まる（一定値になる）ことを示す．

年数をn，連続複利の利率（年率）をrとする．倍率をy，$a=nr$とすると，2.1節で示したように，一括投資では連続複利のもとで$y=e^a$の関係が成り立つ．そこで，まずは（5）式を参考にして，連続複利のもとで，年にm回積立を行うと，満期額Sは毎期の積立額Mを用いて，（8）式で計算できる．

$$S = e^{rn}M + e^{r(n-1/m)}M + \cdots + e^{r(2/m)}M$$

$$+ e^{(r/m)}M = \left\{\sum_{t=1}^{mn} e^{(r/m)t}\right\}M \tag{8}$$

したがって，$y=\frac{S}{mnM}$とすると，

$$y = \frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn} e^{(r/m)t} = \frac{1}{mn}\left(\frac{e^{nr}-1}{1-e^{-r/m}}\right)$$

$$= \frac{1}{mn}\left(\frac{e^a-1}{1-e^{-a/mn}}\right) \tag{9}$$

となるが，このままでは倍率yはnに依存する．そこで，離散的に積立投資をするのではなく，連続的に積立投資をすると考え，年内の積立回数（m）を無限大にすると，

$$y = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mn}\left(\frac{e^a-1}{1-e^{-a/mn}}\right) = \frac{e^a-1}{a} \tag{10}$$

表5　ルール数

倍率	$y=1.5$	$y=2$	$y=3$
連続複利・連続積立	76.27	125.64	190.38
離散複利・離散積立 ($n=40,\ m=12$)	76.19 (76の法則)	125.59 (126の法則)	190.45 (190の法則)

となる[7]．したがって，yとaは一対一の関係になり，yが決まると，aも一意に決まることになる．具体的に，$y=1.5, 2, 3$の場合について，ルール数を求めると，表5のようになる．

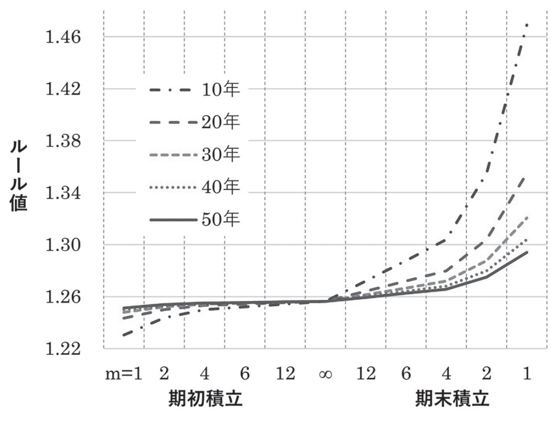
連続複利・連続積立投資の場合のルール数も整数にすると，同じ法則になることがわかる．

2.5　期初積立と期末積立の違い

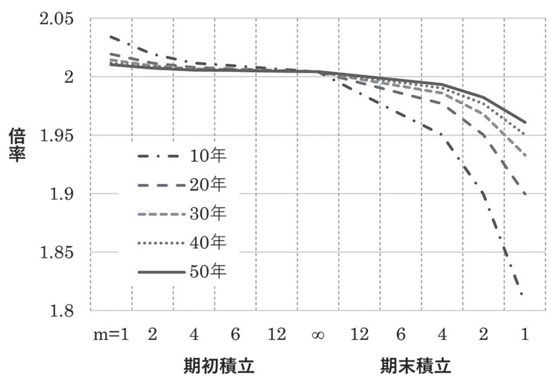
126の法則は，現時点から貯蓄や投資を開始する期初積立を想定している．一方，表4に示した年金終価係数で計算するときには期末積立を想定している[8]．期末積立の場合の積立元本に対する倍率y_0は(11)式で計算できる．

$$y_0=\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{nr}=\frac{1}{a}\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn}-1\right\} \tag{11}$$

期初積立による価値（倍率）は，期末積立に比べて，$1+\frac{r}{m}$倍となる．そこで，期初積立と期末積立の違いによるルール値aや倍率への影響を議論する．期初積立のキャッシュフローは期末積立よりも全体的に1期分だけ前に発生するため，期初積立のルール値は期末積立のルール値よりも小さくなる．また，期初積立においては，$m=1$の場合，1年目のキャッシュフローは現時点で発生するが，$m=2$の場合，現時点と6カ月後に半分ずつキャッシュフローが発生する．このように，積立回数が増えると，より後半にキャッシュフローが発生するため，ルール値は大きくなる．一方で，期末積立においては逆である．$m=1$の場合，1年目のキャッシュフローは1年後に発生するが，$m=2$の場合，6カ月後と1年後に半分ずつキャッシュフローが発生する．このように，積立回数が増えると，より前半にキャッシュフローが発生するため，ルール値は小さくなる．そこで，期初積立と期末積立の違いによるルール値aや倍率への影響を図3に示す．連続積立の場合には期初積立と期末積立は同じであるため，横軸は期初積立の積立回数（昇順），連続積立（$m\to\infty$），期末積立の積立回数（降順）とし，図3(a)は縦軸に倍率が2倍のときのルール値a，図3(b)は縦軸に$a=1.26$に対する倍率として，それらの関係を示した．



(a) $y=2$におけるルール値との関係



(b) $a=1.26$における倍率との関係

図3　積立回数（m）に対する期初積立と期末積立の違いによる影響

7　連続的に積立投資をするために，(9)式において合計する代わりに，積分を行うと，(10)式と同じ結果が得られる．

$$y=\frac{1}{mn}\int_0^{mn}e^{(r/m)t}dt=\frac{1}{mn}\cdot\frac{1}{r/m}\left[e^{(r/m)t}\right]_0^{mn}$$
$$=\frac{1}{nr}\left(e^{nr}-1\right)=\frac{e^a-1}{a}$$

また，離散複利の間隔($1/m$)と年内の積立回数(m)は逆数の関係にあるので，mを無限大（連続複利・連続積立）にすることによって，(5)式から直接，(10)式を求めることもできる．

$$y=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{a}\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{a}{mn}\right)=\frac{e^a-1}{a}$$

ところで，(10)式の分母は利率rのもとでn年間，一括投資をしたときの単利部分，分子は連続複利で一括投資したときの複利部分に相当する．したがって，積立投資の倍率はそれらの比を与えるルールとしての意味づけも与えることができる．

8　金融庁のホームページにある資産運用シミュレーション(https://www.fsa.go.jp/policy/nisa2/moneyplan_sim/index.html)は月末積立を想定している．

期初積立ではnやmの値にかかわらず，倍率が2倍のときのルール値は1.23～1.26の間で，$a = 1.26$に対する倍率も2の近辺で安定しているが，期末積立ではmが小さくなるにつれて，年数によってルール値や倍率が大きく異なることがわかる．ただし，$m = 12$（月次積立）では，期初積立の方が期末積立よりも年数による違いは小さいが，どちらもほとんど違いがなく，期初積立と期末積立の違いによるルール値や倍率への影響は小さい．一方で，mが小さくなると，その違いは非常に大きくなる．例えば，$m = 1$（年1回積立）で，$n = 20$の場合，期初積立のルール値は1.2436，倍率は2.0194であるが，期末積立のルール値は1.3549，倍率は1.8997と，それぞれ1.26，2との差が大きくなる．

この理由を以下に述べる．前述したように，期初積立の場合，mが大きくなると，キャッシュフローがより後半に発生し，ルール値は大きく，倍率は小さくなりやすいが，複利回数が増えることによって実効利率[9]が大きくなり，ルール値は小さく，倍率は大きくなりやすい．特に年数が短いと，利率が大きくなり，その影響は大きくなる．そのため，ルール値や倍率が安定すると考えられる．一方で，期末積立の場合には逆に，mが小さくなると，キャッシュフローがより後半に発生しやすく，さらに，複利回数も少なくなるので，ルール値は大きく，倍率は小さくなる．特に年数が短いと，その影響は大きくなる．

このことを確かめるために，それぞれの倍率を年内の複利回数が増えることにより実効利率が増加する効果（ここでは，実効利率要因と呼ぶ）とキャッシュフローが複数回にわたることによる効果（ここでは，C.F.要因と呼ぶ）の2つに分解する．実効利率要因は，異なる年数でも比較を可能にするために，年平均にする．(5) 式（期初積立），(11) 式（期末積立）をそれぞれ (12)，(13) 式のように分解することによって，これらの要因を記述できる．ここで，Cは組み合わせの数を表し，${}_{m-1}\mathrm{C}_k = \frac{(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times(m-k)}{k\times(k-1)\times\cdots\times1}$である．

$$y = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}_{\substack{\geq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(1+r)^t \\ \text{(実効利率要因 (年平均))}}} \times \underbrace{\frac{1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{{}_{m-1}\mathrm{C}_k}{k+1}\left(\frac{r}{m}\right)^k}{1+\sum_{k=1}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{r}{m}\right)^k}}_{\leq 1 \text{ (C.F. 要因)}} \qquad (12)$$

$$y_0 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}_{\substack{\geq \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}(1+r)^t \\ \text{(実効利率要因 (年平均))}}} \times \underbrace{\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1}{r}}_{\geq 1 \text{ (C.F.要因)}} \qquad (13)$$

ルール値$a = 1.26$に対する倍率を計算し，要因分解した結果を表6に示す．

倍率（全体）は，図3(b) の値である．期初積立の倍率はほぼ2であるが，期末積立の倍率は$m = 12$の場合には2に近い値をとるが，mが小さくなるにつれて，倍率は小さくなる．実効利率要因は，

表6　ルール値 a = 1.26 に対する倍率の要因分解

		期初積立 (年数)					期末積立 (年数)				
	m	10 年	20 年	30 年	40 年	50 年	10 年	20 年	30 年	40 年	50 年
倍率 (全体)	1	2.034	2.019	2.014	2.012	2.010	1.807	1.900	1.933	1.950	1.961
	2	2.019	2.012	2.009	2.008	2.007	1.900	1.950	1.968	1.977	1.982
	4	2.012	2.008	2.007	2.006	2.006	1.950	1.977	1.986	1.991	1.993
	6	2.009	2.007	2.006	2.006	2.005	1.968	1.986	1.992	1.995	1.997
	12	2.007	2.006	2.005	2.005	2.005	1.986	1.995	1.998	2.000	2.001
	∞	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004
実効利率要因	1	2.034	2.019	2.014	2.012	2.010	1.807	1.900	1.933	1.950	1.961
	2	2.081	2.043	2.030	2.024	2.020	1.842	1.920	1.948	1.962	1.970
	4	2.106	2.055	2.038	2.030	2.025	1.861	1.931	1.955	1.967	1.975
	6	2.115	2.060	2.041	2.032	2.026	1.867	1.934	1.957	1.969	1.976
	12	2.124	2.064	2.044	2.034	2.028	1.874	1.938	1.960	1.971	1.978
	∞	2.133	2.068	2.047	2.036	2.030	1.881	1.942	1.963	1.973	1.979
C.F. 要因	1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	2	0.970	0.985	0.990	0.992	0.994	1.032	1.016	1.010	1.008	1.006
	4	0.955	0.977	0.985	0.988	0.991	1.048	1.024	1.016	1.012	1.009
	6	0.950	0.974	0.983	0.987	0.990	1.054	1.027	1.018	1.013	1.011
	12	0.945	0.972	0.981	0.986	0.989	1.060	1.029	1.019	1.015	1.012
	∞	0.940	0.969	0.979	0.984	0.988	1.066	1.032	1.021	1.016	1.013

[9] $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$で表される．例えば，$r = 3\%$，$m = 12$の場合，実効利率は3.04%となる．

期初積立，期末積立ともにmが大きくなると，その値は大きくなる．C.F.要因は，$m=1$のときに1であるが，mが大きくなると，期初積立に対する値は大きくなる一方で，期末積立の場合には小さくなる．

3．積立金額が可変の場合

積立を行う場合，若いときの積立金額は少ないが，徐々に積立金額を増加させる計画を立てるなど,積立金額を変更させていくことも考えられる．例えば，図4は，40年間月初に積立をする場合に，最初の10年間は毎月1万円，それから10年ごとに，2万円，3万円と増やしていき，最後の10年間は4万円を積み立てる場合のキャッシュフローを示している．

本節では，積立金額が可変の（定額でない）場合でも，この法則が成り立つ，つまり任意の倍率と積立金額のパターンに対応して，ほぼルール数が決まることを示す．

3.1 モデル

時間が経つにつれて，金額を変更して積み立てることをモデル化する．積立年数のn年間をK個の期間に分けて積立金額を変更し，年内の積立回数をm回として，mn回にわたり積立投資をして，満期にSが得られる場合のキャッシュフローを想定しよう．ここで，rを利率，N_kをk分割期間の年数，M_kをk分割期間の毎期の積立金額とする．また，$W_1=n$, $W_k=W_{k-1}-N_{k-1}$ $(k=2, \ldots, K)$, $W_{k+1}=0$とする．図4の場合，$K=4$, $N_k=10$ $(k=1, 2, 3, 4)$, $W_1=40$, $W_2=30$, $W_3=20$, $W_4=10$, $W_5=0$, $M_1=1$, $M_2=2$, $M_3=3$, $M_4=4$である．満期額Sは毎期の積立額の満期価値の合計なので，(14) 式のように積立金額M_kと関係づけることができる．

$$S=\sum_{k=1}^{K}\left\{\sum_{t=1}^{mN_k}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{t}\right\}M_k\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mW_{k+1}} \tag{14}$$

この数式では展開しにくいので，積立金額の増分を満期まで投資すると考える．$k-1$分割期間からk分割期間への積立金額の増分をd_kとすると，$d_1=M_1$, $d_k=M_k-M_{k-1}$ $(k=2, \ldots, K)$ となる．図4を一般化したキャッシュフローと，それを分解したものを図5に示す．

このように考えると，満期までの投資金額の価値を簡単に計算できるのがわかる．また，k分割期間における積立金額の増分を投資する年数が全体に占める割合をw_kとすると，$w_k=\frac{W_k}{n}$ $(k=1, \ldots, K)$ となる．そのとき，満期額Sは (15) 式のように記述することができる．

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{K}\left\{\sum_{t=1}^{w_k mn}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{t}\right\}d_k\\&=\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}}\right]d_k\end{aligned} \tag{15}$$

一方，積立金額の合計Pは (16) 式で記述できる．

$$P=mn\sum_{k=1}^{K}w_k d_k \tag{16}$$

したがって，積立元本額（合計）Pに対する満期額Sの倍率yは，

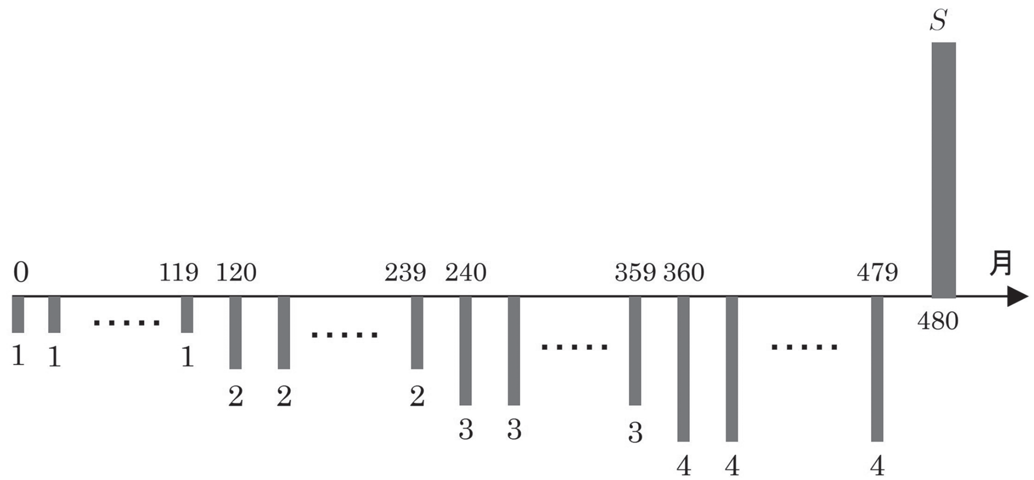


図4 積立金額が可変の場合のキャッシュフロー例

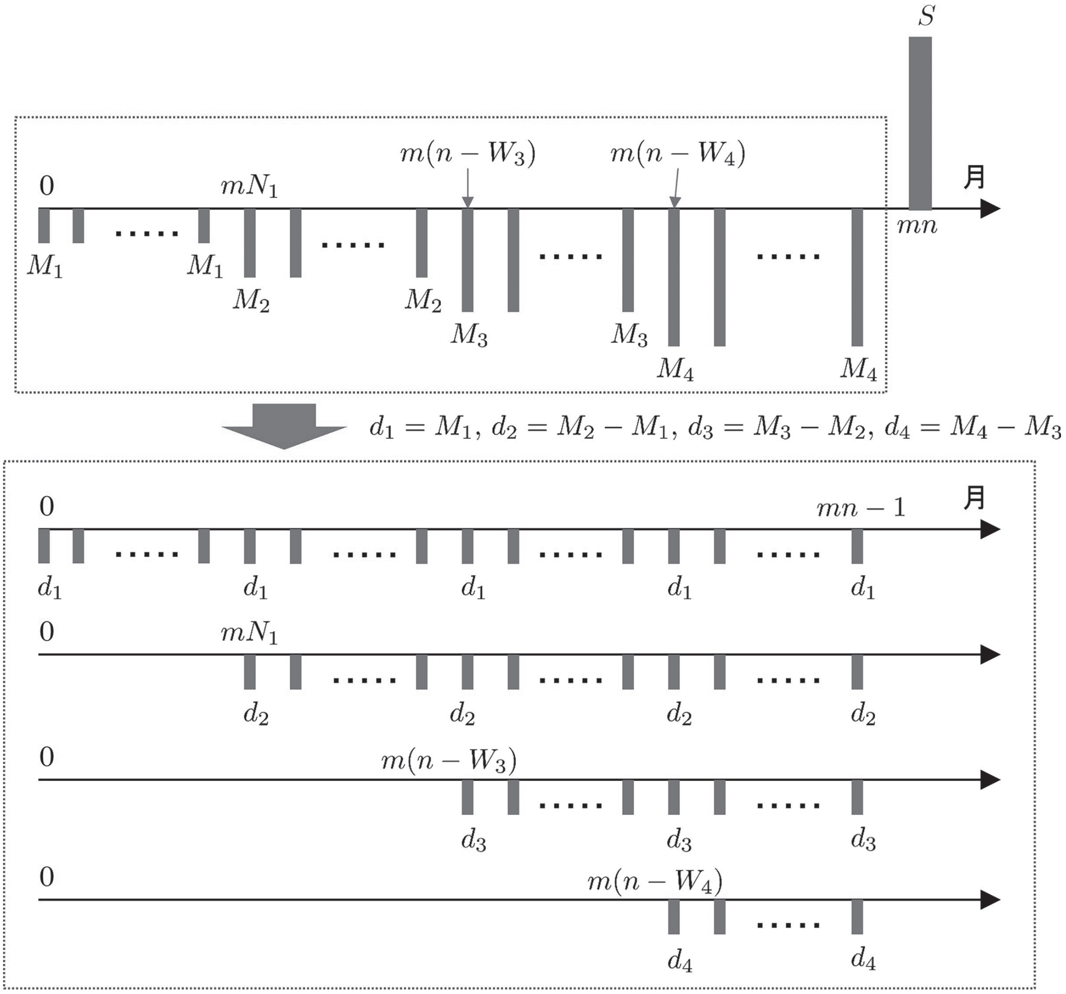


図5　積立金額が可変の場合のキャッシュフローの分解

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{S}{P} \\
&= \frac{1}{mn\sum_{u=1}^{K} w_u d_u} \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{K}\left[\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left(1+\frac{a}{mn}\right)\sum_{k=1}^{K} v_k\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{w_k mn}-1\right\}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

となる．ただし，$v_k = \frac{d_k}{\sum_{u=1}^{K} w_u d_u}$，$a = nr$ である[10]．また，2.4節を参考にして，$m \to \infty$ とすると，(18)式のように書き直すことができる．

$$
y = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{K} v_k\left(e^{w_k a}-1\right) \tag{18}
$$

積立金額が可変の場合でも，連続複利・連続積立の場合には，倍率 y に対して，ルール値 a は一意に決まることがわかる．離散積立の場合には，n や m に依存するが，(18) 式で得られるルール値 a に，ほぼ近い値が得られると期待できる．

3.2　数値例

$n = 40$, $m = 12$ (40年毎月積立), $K = 4$ (4分割) の場合について，以下に3つの数値例を示す．$\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)$, $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ とする．

(例1) $\boldsymbol{N} = (10, 10, 10, 10)$, $\boldsymbol{M} = (1, 2, 3, 4)$ の場合
$\boldsymbol{w} = (1,\ 0.75,\ 0.5,\ 0.25)$, $\boldsymbol{d} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$\boldsymbol{wd}^{\top} = 2.5$, $\boldsymbol{v} = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$

(例2) $\boldsymbol{N} = (10, 10, 10, 10)$, $\boldsymbol{M} = (4, 3, 2, 1)$ の場合
$\boldsymbol{w} = (1, 0.75, 0.5, 0.25)$, $\boldsymbol{d} = (4, -1, -1, -1)$,
$\boldsymbol{wd}^{\top} = 2.5$, $\boldsymbol{v} = (1.6, -0.4, -0.4, -0.4)$

(例3) $\boldsymbol{N} = (16, 12, 8, 4)$, $\boldsymbol{M} = (1, 1.5, 2, 3)$ の場合
$\boldsymbol{w} = (1,\ 0.6,\ 0.3,\ 0.1)$, $\boldsymbol{d} = (1,\ 0.5,\ 0.5,\ 1)$,
$\boldsymbol{wd}^{\top} = \frac{31}{20}$, $\boldsymbol{v} = (\frac{20}{31}, \frac{10}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31})$

(17) 式を用いて $K = 4$, $m = 12$ の場合の $y = 1.5$ お

[10] 毎月定額積立の場合，$K = 1$, $w_1 = 1$, $v_1 = 1$ を代入すると，(5) 式と一致する．

表7 数値例

ケースa：$n=40$				$y=1.5$			$y=2$		
	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{M}$	元本	a	r	満期額	a	r	満期額
ケースa1	(10, 10, 10, 10)	(1, 2, 3, 4)	1,200	0.9880	2.47%	1,800	1.6017	4.00%	2,400
ケースa2	(10, 10, 10, 10)	(4, 3, 2, 1)	1,200	0.6275	1.57%	1,800	1.0518	2.63%	2,400
ケースa3	(16, 12, 8, 4)	(1, 1.5, 2, 3)	744	0.9248	2.31%	1,116	1.4963	3.74%	1,488
ケースb：$n=20$				$y=1.5$			$y=2$		
	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{M}$	元本	a	r	満期額	a	r	満期額
ケースb1	(5, 5, 5, 5)	(2, 4, 6, 8)	1,200	0.9867	4.93%	1,800	1.6010	8.00%	2,400
ケースb2	(5, 5, 5, 5)	(8, 6, 4, 2)	1,200	0.6269	3.13%	1,800	1.0513	5.26%	2,400
ケースb3	(8, 6, 4, 2)	(2, 3, 4, 6)	744	0.9237	4.62%	1,116	1.4957	7.48%	1,488

よび$y=2$に対するルール値aを求め，$r=a/n$として(15)式で満期額Sを計算した結果を表7に示す．上記の例1～3がケースa1～a3に相当する．

まずはじめに，満期額を見てみよう．表7の$y=2$のケースaとケースbを見ると，どのような積立パターンに対しても，満期額は元本の2倍になることが確認できる．ここで，ケースb1～b3は，ケースa1～a3の$\boldsymbol{N}$は0.5倍，$\boldsymbol{M}$は2倍のケースを示している．同様に，$y=1.5$を見ると，満期額は元本の1.5倍になる．ケースa1, a2は10年ごと，ケースb1, b2は5年ごとに積立金額を変更するパターンである一方，ケースa3, b3は積立金額を変更する期間が可変の場合である．いずれにしても，特徴は変わらない．

キャッシュフロー・パターン（分割区分数）が異なる7つのケースについて，各区分における年数はすべて同じと想定し，様々なyやnなどに対して計算したルール値を表8に示す．ルール数（整数）は$n=40$の場合のルール値aを100倍して四捨五入した値を示す．

表の見方を説明する．例えば，区分数$K=4$で，キャッシュフロー・パターン(C.F.)が(1, 2, 3, 4)の行を見てみよう．これは，各区分ごとの積立金額の比は1:2:3:4であることを示している．$n=20$のとき，最初の5年間は毎月1万円，次の5年間は毎月2万円，さらに次の5年間は毎月3万円，最後の5年間は毎月4万円のような場合である．$K=3$で，キャッシュフロー・パターンが(1, 2, 3)の場合，$n=30$ならば，10年間ごとに毎月1万円，2万円，3万円の積立を行うケースである．$K=1$は定額の場合に相当するので，ルール値は表2の値と一致する．表の各行を見ると，キャッシュフロー・パターンが同じであれば，年数にかかわらず，ルール値はほぼ同じであり，法則が成り立つことがわかる．

また，ルール値は(1, 2, 3, 4)が最も大きく，(4, 3, 2, 1)が最も小さい．これは早い時期の積立金額が相対的に小さいほど，ルール値が大きくなることを表している．可変の場合，若いときほど積立金額が小さくなると考えられ，キャッシュフロー・パターンが(1, 2, 3, 4)のパターンの場合，2倍になるルール数は160であり，たとえ積立元本合計が同じでも定額に比べて必要な利率や年数は大きくなる．

表8 ルール値a

倍率 y	区分数 K	C.F. $\boldsymbol{M}$	離散複利($m=12$) $n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=40$	$n=50$	連続 $m\to\infty$	ルール数(整数)
1.5	4	(1,2,3,4)	0.9841	0.9867	0.9875	0.9880	0.9882	0.9893	99
	3	(1,2,3)	0.9512	0.9536	0.9544	0.9548	0.9550	0.9560	95
	2	(1,2)	0.8928	0.8949	0.8956	0.8960	0.8962	0.8971	90
	1	(1)	0.7595	0.7611	0.7616	0.7619	0.7620	0.7627	76
	2	(2,1)	0.6643	0.6655	0.6660	0.6662	0.6663	0.6668	67
	3	(3,2,1)	0.6380	0.6392	0.6396	0.6398	0.6399	0.6404	64
	4	(4,3,2,1)	0.6257	0.6269	0.6273	0.6275	0.6276	0.6280	63
2	4	(1,2,3,4)	1.5995	1.6010	1.6015	1.6017	1.6018	1.6024	160
	3	(1,2,3)	1.5478	1.5492	1.5496	1.5499	1.5500	1.5505	155
	2	(1,2)	1.4570	1.4583	1.4587	1.4589	1.4591	1.4596	146
	1	(1)	1.2543	1.2554	1.2557	1.2559	1.2560	1.2564	126
	2	(2,1)	1.1096	1.1105	1.1108	1.1110	1.1111	1.1115	111
	3	(3,2,1)	1.0693	1.0702	1.0705	1.0707	1.0707	1.0711	107
	4	(4,3,2,1)	1.0505	1.0513	1.0516	1.0518	1.0518	1.0522	105

表9　ルール数の簡便表（行: 倍率, 列: キャッシュフロー・パターン）

	キャッシュフロー・パターン ($\boldsymbol{M}$)						
倍率	(1,2,3,4)	(1,2,3)	(1,2)	(1)	(2,1)	(3,2,1)	(4,3,2,1)
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.10	24.79	23.92	22.36	18.73	16.14	15.44	15.10
1.20	46.52	44.91	42.03	35.36	30.61	29.30	28.69
1.30	65.81	63.56	59.54	50.29	43.69	41.88	41.03
1.40	83.12	80.30	75.30	63.83	55.64	53.39	52.33
1.50	98.80	95.48	89.60	76.19	66.62	63.98	62.75
1.60	113.10	109.34	102.68	87.56	76.77	73.79	72.40
1.70	126.24	122.07	114.71	98.08	86.22	82.93	81.39
1.80	138.38	133.84	125.85	107.87	95.04	91.48	89.81
1.90	149.65	144.78	136.21	117.01	103.31	99.50	97.72
2.00	160.17	154.99	145.89	125.59	111.10	107.07	105.18
2.10	170.02	164.55	154.97	133.66	118.46	114.21	112.23
2.20	179.27	173.53	163.51	141.29	125.42	120.99	118.91
2.30	188.00	182.01	171.57	148.51	132.04	127.43	125.27
2.40	196.25	190.03	179.20	155.36	138.34	133.57	131.33
2.50	204.07	197.64	186.44	161.88	144.35	139.43	137.12
2.60	211.50	204.86	193.33	168.11	150.10	145.03	142.65
2.70	218.58	211.75	199.90	174.05	155.60	150.40	147.96
2.80	225.34	218.33	206.17	179.75	160.88	155.55	153.05
2.90	231.80	224.61	212.18	185.21	165.95	160.51	157.95
3.00	237.99	230.64	217.93	190.45	170.83	165.28	162.67

$\boldsymbol{M} = (1)$: 定額積立

次に，様々な倍率とキャッシュフロー・パターンに対するルール数の簡便表を表9に示す.

表の見方であるが，行が倍率，列がキャッシュフロー・パターンで，そのクロスしたところの値がルール数である．例えば，倍率が1.8倍で，キャッシュフロー・パターンが (1, 2) の場合のルール数は125.85となり，四捨五入すると126である.

4．一括投資と積立投資の両方を考慮する場合

4.1　モデル

積立投資を始めるときに，すでに保有している資金を一括投資するとともに積立投資を行う場合に用いることができるモデルを考えてみよう．一括投資と積立投資の元本合計をPとし，それに占める一括投資の割合をαとする．つまり，初期時点での一括投資金額はαPである．積立年数をn，年内の積立回数をm回とし，初期時点から積立を始めて，mn回にわたり，定額で毎回$\frac{(1-\alpha)P}{mn}$を積立投資すると想定する. 初期時点の投資金額は，一括投資金額と積立投資における最初の積立金額の和となる．rを利率とすると，満期額Sは (19) 式で計算できる.

$$S = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} \alpha P + \left\{\sum_{t=1}^{mn}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{t}\right\}\frac{(1-\alpha)P}{mn} \tag{19}$$

一括投資の場合，通常，年複利で計算されることが多いが，本稿では積立投資と同時に扱うために，年m回複利とする．一括投資の割合がαの場合の元本に対する倍率y（α）は (20) 式で求められる.

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \frac{S}{P} \\ &= \alpha\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn} + (1-\alpha) \\ &\quad \times\frac{1}{a}\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn} - 1\right\}\left(1+\frac{a}{mn}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

連続複利・連続積立の場合，(21) 式で記述できる[11].

[11] 積立投資部分は3節で示した積立金額が可変の場合にも成り立つ．(20)，(21) 式の右辺第2項の$1-\alpha$にそれぞれ (17)，(18) 式の右辺を掛けることによって，以下のように求められる.

$$\text{離散}\ :\ y(\alpha) = \alpha\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn} + (1-\alpha)\cdot\frac{1}{a}\left(1+\frac{a}{mn}\right) \times\sum_{k=1}^{K} v_k\left\{\left(1+\frac{a}{mn}\right)^{w_k mn} - 1\right\}$$

$$\text{連続}\ :\ y(\alpha) = \alpha e^{a} + (1-\alpha)\cdot\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{K} v_k\left(e^{w_k a} - 1\right)$$

$$y(\alpha) \ = \ \alpha e^a + (1-\alpha)\left(\frac{e^a-1}{a}\right) \tag{21}$$

具体的に計算例を示す．目標資産額を2,000万円，現在の保有資金を200万円とする．目標資産額が一括投資額と積立元本の合計の2倍になるように積立投資を行いたいとしよう．一括投資額を現在の保有資金とすると，目標資産額と倍率を決めれば，それに応じて一括投資の割合は決まることになる．このとき，元本合計は$P=1{,}000$万円となるので，一括投資の割合は$\alpha=0.2$となる．(20) 式に，$\frac{S}{P}=2$，$\alpha=0.2$, $m=12$, $n=40$を代入すると，ルール値は$a=1.0594$と求められる．

4.2　数値例

2種類の倍率 ($y=1.5, 2$) に対して，(20) 式を用いて離散複利の場合のルール値，(21) 式を用いて連続複利・連続積立の場合のルール値を求める．まずはじめに，6種類のαに対して，ルール値を計算した結果を表10に示す．離散複利の場合，年数 (n) によって値が異なるので，5種類の年数に対するルール値を計算する．ルール数 (整数) は$n=40$の場合のルール値aを100倍して四捨五入した値を示す．

表10を見ると，一括投資の割合αが増えるにつれて，ルール値aが小さくなることがわかる．離散複利の場合には，ルール値は年数nに依存するが，ほぼ同じ値が得られており，元本に対する倍率に対して「年数×利率」(ルール数) が決まる法則が存在することが確認できる．連続複利・連続積立の場合には一意に決まり，離散複利の場合とほぼ同じ値になることもわかる．

4.3　法則の活用方法

一括投資や積立投資に活用できる法則は，ある倍率（2倍，3倍など）に対するルール数がそれぞれ1つに決まるため，わかりやすい法則として認識しやすいという特徴がある．一方，一括投資と積立投資の両方を考慮した場合，ルール数は倍率と一括投資の割合の2つに依存するため，倍率を定めても「○○の法則」と言うことができない．この欠点を克服することは難しいが，この法則を簡単に活用するために，倍率を$y=1.25$, 1.5, 2, 2.5, 3に限定する一方で，元本に占める一括投資の割合を0.02刻みにした簡便表を表11に示す．

これらの値 (ルール数) は，$n=40$, $m=12$として，(20) 式を用いて求めたルール値aを100倍して求めている．表の見方であるが，例えば，倍率が2倍，元本割合が$\alpha=0.2$の組み合わせに対するルール数は105.94となる (四捨五入して整数とすれば，106となる)．実際には，4.1節で挙げた具体例のように，現在の保有資金から，一括投資の元本割合を設定できるので，この表の行で元本割合を探す．例えば，$\alpha=0.28$としよう．倍率を2倍とすると，それに対応するルール数は100.13なので，おおよそ100として，「年数×利率＝100」を満たす利率と年数の組み合わせを見つけるとよい．

表10　ルール値 a

倍率 y	割合 α	離散複利 ($m=12$) $n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=40$	$n=50$	連続 $m\to\infty$	ルール数 (整数)
1.5	0.0	0.7595	0.7611	0.7616	0.7619	0.7620	0.7627	76
	0.2	0.6388	0.6395	0.6397	0.6398	0.6398	0.6401	64
	0.4	0.5556	0.5558	0.5559	0.5559	0.5559	0.5560	56
	0.6	0.4937	0.4936	0.4936	0.4936	0.4936	0.4935	49
	0.8	0.4453	0.4450	0.4449	0.4449	0.4449	0.4448	44
	1.0	0.4062	0.4058	0.4057	0.4056	0.4056	0.4055	41
2	0.0	1.2543	1.2554	1.2557	1.2559	1.2560	1.2564	126
	0.2	1.0595	1.0594	1.0594	1.0594	1.0594	1.0593	106
	0.4	0.9288	0.9282	0.9280	0.9279	0.9278	0.9276	93
	0.6	0.8320	0.8312	0.8310	0.8308	0.8307	0.8304	83
	0.8	0.7564	0.7555	0.7552	0.7550	0.7549	0.7546	76
	1.0	0.6952	0.6941	0.6938	0.6936	0.6935	0.6931	69

$\alpha=0$：積立投資, $\alpha=1$：一括投資

表11　ルール数の簡便表（$n=40$, $m=12$：(20) 式から算出）

割合 (α)	1.25倍 ($y=1.25$)	1.5倍 ($y=1.5$)	2倍 ($y=2$)	2.5倍 ($y=2.5$)	3倍 ($y=3$)	割合 (α)	1.25倍 ($y=1.25$)	1.5倍 ($y=1.5$)	2倍 ($y=2$)	2.5倍 ($y=2.5$)	3倍 ($y=3$)
0.00	43.02	76.19	125.59	161.88	190.45						
0.02	42.18	74.71	123.16	158.76	186.78	0.52	28.81	51.65	86.66	113.09	134.30
0.04	41.38	73.30	120.86	155.81	183.34	0.54	28.46	51.06	85.73	111.94	132.99
0.06	40.61	71.95	118.67	153.03	180.10	0.56	28.12	50.48	84.82	110.82	131.73
0.08	39.88	70.66	116.59	150.39	177.04	0.58	27.79	49.91	83.94	109.74	130.49
0.10	39.17	69.43	114.62	147.89	174.14	0.60	27.46	49.36	83.08	108.67	129.28
0.12	38.49	68.25	112.73	145.51	171.38	0.62	27.15	48.82	82.24	107.64	128.10
0.14	37.84	67.12	110.92	143.24	168.76	0.64	26.84	48.29	81.42	106.63	126.95
0.16	37.21	66.03	109.19	141.07	166.26	0.66	26.54	47.78	80.62	105.64	125.83
0.18	36.60	64.99	107.53	138.99	163.87	0.68	26.24	47.27	79.84	104.68	124.73
0.20	36.02	63.98	105.94	137.00	161.59	0.70	25.96	46.78	79.08	103.73	123.66
0.22	35.45	63.01	104.41	135.09	159.39	0.72	25.68	46.31	78.33	102.81	122.61
0.24	34.91	62.07	102.93	133.25	157.29	0.74	25.40	45.84	77.60	101.91	121.59
0.26	34.38	61.16	101.51	131.48	155.26	0.76	25.13	45.38	76.89	101.03	120.58
0.28	33.87	60.29	100.13	129.77	153.31	0.78	24.87	44.93	76.19	100.16	119.60
0.30	33.37	59.44	98.81	128.12	151.43	0.80	24.61	44.49	75.50	99.31	118.64
0.32	32.89	58.62	97.52	126.53	149.61	0.82	24.36	44.06	74.83	98.49	117.69
0.34	32.43	57.83	96.28	124.99	147.86	0.84	24.12	43.64	74.18	97.67	116.77
0.36	31.98	57.06	95.08	123.51	146.16	0.86	23.87	43.23	73.53	96.88	115.86
0.38	31.54	56.31	93.92	122.06	144.52	0.88	23.64	42.82	72.90	96.10	114.98
0.40	31.12	55.59	92.79	120.67	142.92	0.90	23.41	42.43	72.28	95.33	114.11
0.42	30.71	54.89	91.69	119.31	141.38	0.92	23.18	42.04	71.68	94.58	113.25
0.44	30.31	54.20	90.63	117.99	139.88	0.94	22.96	41.66	71.08	93.85	112.41
0.46	29.92	53.54	89.59	116.72	138.43	0.96	22.74	41.29	70.50	93.12	111.59
0.48	29.54	52.89	88.59	115.47	137.01	0.98	22.53	40.92	69.93	92.41	110.78
0.50	29.17	52.26	87.61	114.26	135.64	1.00	22.32	40.56	69.36	91.72	109.99

4.4　モデル化をする際の注意点

一括投資と積立投資の両方を考慮する場合，一括と積立元本の合計に対する一括投資元本の割合をパラメータとして導入し，モデル化した．この理由は，パラメータを割合ではなく，毎回の積立金額とすると，この法則が成り立たないからである．例えば，一括投資，積立投資に対して，

(1) 現在200万円保有していて，利率3％で運用すると，何年で2倍になるか？

(2) 毎月1万円ずつ積立を行い，利率3％で運用すると，何年で2倍になるか？

という問いに対しては，それぞれ，(1) は72の法則を用いて24年，(2) は126の法則を用いて42年となる．利率が3％ではなく，6％のときもすぐに，それぞれ12年，21年と回答できる．一方，

(3) 現在200万円保有していて，毎月1万円ずつ積立を行い，利率3％で運用すると，何年で2倍になるか？

という問いに対してはどのように回答できるだろうか．この問題に対する回答は，以下の (22) 式が成り立つ n を求めればよい．

$$y = \frac{S}{P} = \frac{1}{L+mnM}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}L + \frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{r/m}\cdot M\right] \tag{22}$$

ここで，L は一括投資額，M は1回あたりの積立金額で，P は元本合計で $P=L+mnM$ である．

上記の問題で，$L=200$, $M=1$, $m=12$, $r=0.03$, $y=2$ とすると，(22) 式を満たす n は，32.05年と求められ，$nr=0.9616$ が得られる．ここで，利率を6％に変更すると，(22) 式を満たす n は，17.67年と求められるが，$nr=0.8837$ となり，「年数×利率」は同じにならない．したがって，このような問題に対しては，法則を用いて計算することができない．様々な倍率に対して，(22) 式を満たす利率や年数を求め，「年数×利率」を計算した結果を表12に示す．

どのような場合も，nr の値は近い値を取らず，法則が成り立たないことが確認できる．そこで，(22) 式を

$$y = \frac{L}{L+mnM}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} + \frac{mnM}{L+mnM}\cdot\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{nr} \tag{23}$$

表12 「年数 × 利率」の値

	利率	$r=2\%$	$r=3\%$	$r=4\%$	$r=5\%$	$r=6\%$
$y=1.5$	年数 (n)	28.34	17.56	12.55	9.70	7.89
	年数 × 利率 (nr)	0.5667	0.5267	0.5018	0.4852	0.4734
$y=2$	年数 (n)	51.27	32.05	22.92	17.67	14.32
	年数 × 利率 (nr)	1.0254	0.9616	0.9166	0.8837	0.8589
$y=3$	年数 (n)	82.63	52.37	37.71	29.18	23.67
	年数 × 利率 (nr)	1.6525	1.5711	1.5084	1.4592	1.4199
	年数	$n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=40$	$n=50$
$y=1.5$	利率 (r)	4.87%	2.69%	1.91%	1.49%	1.23%
	年数 × 利率 (nr)	0.4870	0.5371	0.5716	0.5969	0.6162
$y=2$	利率 (r)	8.22%	4.50%	3.18%	2.48%	2.04%
	年数 × 利率 (nr)	0.8216	0.8991	0.9526	0.9919	1.0221
$y=3$	利率 (r)	12.82%	6.95%	4.88%	3.80%	3.12%
	年数 × 利率 (nr)	1.2821	1.3895	1.4644	1.5197	1.5624

と書き換え，$\alpha=\frac{L}{L+mnM}$ とすると，(20) 式が得られる．このように定式化することによって，一括投資と積立投資の両方を考慮した法則を導くことができる[12]．

4.5 一括投資と積立投資のルール数の関係

本節では一括投資と積立投資での合計元本に対する倍率に対応するルール数を求めるモデルを提案し，どのようなキャッシュフローであっても，元本に対する倍率とルール数がほぼ一対一の関係にあるという法則を示した．ここでは，一括投資と積立投資のルール数の関係を示し，それを利用して一括投資と積立投資を同時に行う場合の将来の資産額を簡便に計算する方法を示す．

一括投資による元本倍率を y_{LS} とする．(10) 式より，y_{LS} は積立投資による元本倍率 y およびそのルール値 a を用いて，以下に示す簡単な計算式（(24) 式）で関連付けることができる．

$$y_{LS}=e^{a}=ay+1 \tag{24}$$

例えば，積立投資の倍率 $y=2$ に対するルール値は $a=1.26$ なので，$y_{LS}=e^{1.26}=1.26\times 2+1=3.52$ である．現在保有している200万円を投資し，毎月2万円ずつ積立も行い，利率3%で42年間運用するときの将来の資産額を求めてみよう．積立元本の1,008万円（$=2\times 12\times 42$）は126の法則により2倍になる．したがって，

$$S=200\times 3.52+1{,}008\times 2=2{,}720(\text{万円}) \tag{25}$$

と簡便に計算できる．ExcelのFV関数（期初払い）を使うと，FV (0.03/12, 42*12, -2, -200, 1) で，2,725万円と求められ，ほぼ近似できることがわかる．利率を2倍（6%），運用期間を半分（21年間）にして，毎月の積立額を2倍（4万円）にすると積立元本合計は同じになるので，同様に (25) 式で計算できる．FV関数を使ってもFV (0.06/12, 21*12, -4, -200, 1) で，2,724万円と求められる．

5．FP実務での利用

5.1 積立投資計画の立案

積立投資計画の立案に関するFP実務においては，大きく分けると以下の2点が考えられる．

(1) 利率，積立期間，積立金額から将来の資産額を計算する

(2) 目標資産額を達成するための利率, 積立期間, 積立金額を逆算する[13]

本節では本研究で提案した法則の利用法について，具体例を含めて説明する．

[12] 上記の問題では積立元本は $mnM=12\times 32.05\times 1=384.6$ となる．毎月の積立額を1万円とせずに，目標資産額を一括投資額とこの積立元本の合計の2倍とするならば，一括投資割合は $\alpha=0.342$ $(=\frac{200}{200+384.6})$ である．利率6%で，半分の年数（16.025年）で2倍にするためには，積立合計額を同じにするために，毎月の積立額を2倍（2万円）にすればよい．

[13] 本研究で示した法則は金融サービスにおいて昨今広がっている「ゴール・ベースド・アプローチ」にも相性がよいと考えられる．大庭 (2016) によると，ゴール・ベースド・アプローチでは，通常 ①ゴールのリストアップ，②ゴールの検討，③投資の実行，④レビューの4つのステップを踏む．資産形成においては，第1ステップで退職後資金に対する目標金額と運用期間を設定する．第2ステップでは，それを可能にする投資ポートフォリオを検討するために，投資期間とリスク許容度を考えるが，リスク許容度は期待される運用利回りと関係している．この 2つのパラメータ（利回りと運用期間）は，本研究で提案している法則のパラメータであり，目標の検討プロセスを繰り返すのに役立つことが期待できる．

5.1.1　将来の資産額の計算

将来の資産額は (4) 式に利率 (利回り) r，積立期間mn，毎月の積立金額Mを代入すると計算することができる．例えば，毎月1万円ずつ積立を行い，利率3％で40年間運用する場合，$M = 1$, $m = 12$, $r = 0.03$, $n = 40$を (4) 式に代入すると，資産額は$S = 928.4$万円となる．これはExcelのFV関数 (期初払い) で，FV (0.03/12, 40*12, -1, 0, 1) = 928.4と求められる．

本研究で示した法則を用いると，表計算ソフトを使わなくても,掛け算だけで簡単に計算できる．表3でルール数120 (3％, 40年) に対する倍率は1.934なので，1 (万円) ×12 (カ月) ×40 (年) ×1.934 = 928.3 (万円) と求められる．ルール数が同じであれば同じ倍率を使うことができる．利率4％で30年の場合には1×12×30×1.934 = 696.2，利率6％で20年の場合には1×12×20×1.934 = 464.2となる．利率6％で20年の場合に，利率3％で40年と同じ将来の資産額を得るためには，積立期間が半分になるので，毎月の積立金額を2倍 (2万円) にする必要がある．

5.1.2　目標資産額を達成するための逆算

ある将来時点での目標資産額を達成するには，どのように積立をすればよいかというアドバイスを求められる場合を考えよう．目標資産額から3つのパラメータ (利率，積立期間，毎月の積立金額) の組み合わせを1つに決めるためには，(4) 式の右辺 (毎月積立を想定すると$m = 12$に固定される) に2つのパラメータの組み合わせを与えて，残りの1つのパラメータを求める必要がある．期間と積立金額は (4) 式を変形すれば，それぞれを求める計算式が導出できるが，利率はニュートン法を使って計算することになる．一方で，法則を利用すると，パラメータとして倍率もしくはルール数を与えれば，3つのパラメータの組み合わせは簡単な掛け算と割り算だけで概算値を求めることができる．

例えば，目標資産額を2,000万円として，積立元本が2倍となる126の法則を用いて，資産運用計画を立てるとすると，2,000万円の半分の1,000万円を積み立てることになる．23歳から65歳まで42年間で積み立てることにすると，利率は3％ ($=\frac{1.26}{42}$)，毎月の積立金額は19,841円 ($=\frac{1{,}000\text{ 万円}}{42\times12}$) となる．この積立計画を許容できるか，実行できるか，具体的には，許容リスクのもとで平均3％のリターンを得る投資が可能か，毎回の積立は可能かなどを検討する．

65歳までを積立期間と設定したが，48歳までに (25年間で) 達成したい場合を考えてみよう．利率は5.04％ ($=\frac{1.26}{25}$) で，毎月の積立金額は33,333円 ($=\frac{1{,}000\text{ 万円}}{25\times12}$) となる．リスクの高い運用をすることになるとともに，積立期間が少ない分，毎月の積立金額も多くなる．リスクを許容できない場合には，利率を下げる必要がある．例えば，許容リスクに対応する運用利回りが4％であれば，積立期間を31.5年 ($=\frac{126}{4}$)，毎月の積立金額は26,455円 ($=\frac{1{,}000\text{ 万円}}{31.5\times12}$) として計画を立て直すことになる．

毎月の積立金額を25,000円とするならば，積立年数は33.3年 ($=\frac{1{,}000}{2.5\times12}$) となり，このときに必要な利率は3.78％ ($=\frac{1.26}{33.3}$) である．

23歳からではなく，40歳から積立を開始するとしよう.積立期間が短くなると想定されるので，積立元本が1.5倍になる76の法則を使うことにする．40歳から65歳まで25年間積み立てる場合を考えてみよう．この場合，利率は3.04％ ($=\frac{0.76}{25}$)，毎月の積立金額は44,444円 ($\frac{1{,}333\text{ 万円}}{25\times12}$) と求められる．ここで，運用利回りは許容できるが，積立金額は3万円にしたいとしよう．積立元本は900万円 ($= 3 \times 25 \times 12$) となるので，目標資産額はその1.5倍の1,350万円に下げる必要がある (積立金額と目標資産額は比例する)．他の倍率とルール数の組み合わせも表3の簡便表を用いて求められるので，様々なケースに対応できるだろう．

この法則を利用すると，このようなプロセスにおいて，目標資産額に対する利率，積立期間，毎月の積立金額 (目標額の半分を積立月数で割った値) を簡単な掛け算と割り算ですぐに計算し，それらを検討することができる．FP実務において目標資産額に応じて，いろいろな組み合わせが簡単な計算でわかることは大きなメリットである．それに加えて，リターンとそれに伴うリスク，積立期間などについて，このような試行錯誤を簡単な計算で繰り返すことによって，個人が (アドバイスをするFPも含めて) 自分ごととして積立投資を身近に感じ，投資の意思決定に関連付けて，その理解を深められることも副次的なメリットとして期待できる．本節では定額の積立投資の例で説明したが，可変の積立計画を立てたり，すでに保有している資金を一括投資すると同時に積立を開始する場合であっても，与えるパラメータは増えるが，本研究で提案した法則を用いることができる．

5.2　積立投資の運用途中での検討

4節で提案したモデルは，投資開始時点で一括投資と積立投資の両方を考慮することを想定しているが、積立投資の運用期間中に計画を見直す場合でも適用できる.積立により,すでに積み上がっ

た資金は一括投資額と同様に考えることができるからである．具体例で考えてみよう．目標資産額を2,000万円として，126の法則をもとに積立元本合計の2倍を目指し，毎月2万円ずつ，利率3%で42年間の積立計画を立てたとしよう．以下では，目標資産額は積立元本の2倍として，2,016万円で計算する．ここで，積立を開始してから半分（21年）が経過したとすると，残りの積立期間の予定は21年間である．計画通りに3%で運用できたとすると，積立額は約703万円である．これを一括投資額と考えると，残りの積立元本合計は504万円であるので，元本合計に対する一括投資割合は$\alpha = 0.582$ $(= \frac{703}{703+504})$ である．また，元本合計に対する目標資産額の倍率は1.670倍 $(= \frac{2{,}016}{1{,}207})$ であり，そのルール数は63と求められる．これは利率3%で残り21年間の投資期間におけるルール数の63と一致する．しかし，実際にはリスクが存在するので，計画通りに運用できずに，積立額が予定よりも少ない600万円になった場合（利率1.61%）を考えてみよう．利率（3%）と積立金額（2万円）をそのまま継続したときの最終的な資産額は4.5節で示した方法（法則を利用した簡便法）を用いて評価することができる．ルール値0.63 $(= 0.03 \times 21)$ に対する積立投資の倍率は表3より1.393倍となり，一括投資の倍率は1.878倍 $(= 0.63 \times 1.393 + 1)$ と求められる．したがって，

$$S = 600 \times 1.878 + 504 \times 1.393 = 1,829(\text{万円}) \tag{26}$$

となり，このままでは目標資産額に達しないことが確認できる．

目標資産額の達成を目指す場合，元本合計に対する一括投資割合は，$\alpha = 0.543$ $(= \frac{600}{600+504})$ である．一方で，元本合計に対する目標資産額の倍率は1.827倍 $(= \frac{2{,}016}{1{,}104})$ であり，そのルール数は75と求められる．したがって，残りの21年間で目標資産額を達成するために必要な利率は3.57% $(= \frac{0.75}{21})$ と求められ，計画よりもリスクの高いポートフォリオでの運用に見直すことが必要となる．利率3%のままであれば，運用期間は25年 $(= \frac{75}{3})$，毎月の積立金額は16,800円（= 504万円/300カ月）に変更となる．一方で，残りの期間も利率（3%）と積立金額（2万円）で目標額を達成するための年数を求める場合，4.4節で示したように，法則を用いること（4.1節のモデルを使うこと）はできないため，以下の（27）式を満たすnを求める必要がある．

$$S = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} L + \frac{\left\{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} - 1\right\}\left(1 + \frac{r}{m}\right)}{r/m} \cdot M \tag{27}$$

$S = 2{,}016$, $L = 600$, $M = 2$, $m = 12$, $r = 0.03$とすると，ニュートン法を用いて，$n = 23.3$（年）と求められる[14].

投資にはリスクが伴うため，運用途中での積立額は予定通りにならないことが通常である．運用計画を見直す際には，4.1節のモデルを使った方法が利用できる一方で，上記に示したように法則を使うことができない場合もある．FP実務においては様々な方法を理解してうまく使い分けることが必要である．

6．まとめ

本稿では，近年ニーズが高まっている積立投資に活用できる法則について，一括投資も含めて議論した．まず，離散複利・離散積立において，「満期額が投資元本の何倍になるか」（倍率）が「年数×利率」と「ほぼ」一対一の関係にあるという法則（2倍の場合，126の法則）に対して，連続複利・連続積立のもとでは一意にルール数が決まることを明らかにし，この法則に対する理論を補強することができた．また，期初積立と期末積立の違いについても議論し，期初積立の方が安定的に法則が成り立つことも示した．さらに，この法則を一般化するために，（1）積立金額が可変の場合，（2）一括投資と積立投資の両方を考慮する場合，にも法則が成り立つことを示した．これらの法則は，顧客の様々な資産運用計画に対しても，わかりやすく柔軟に支援するのに役立つだろう．

日本証券業協会（2021）によると，株式・投資信託・公社債の非購入理由（複数回答可）として，「興味がない」（それぞれ55.1%，64.7%，72.1%），「十分な知識をまだ持っていない」（27.2%，22.2%，17.0%）に加えて，「株式投資をする・投資信託・公社債を購入するほどの資金がなかった」がそれ

[14] 21年後の積立額が予定よりも多かった場合，例えば，800万円の場合（利率4.1%），利率（3%）と積立金額（2万円）をそのまま継続したときの最終的な資産額は

$$S = 800 \times 1.878 + 504 \times 1.393 = 2{,}204\ (\text{万円})$$

となり，目標資産額以上となることが予想される．目標資産額の2,000万円に達成するためのルール数は53と計算できるため，残りの21年間で目標資産額を達成するためには，2.52% $(= \frac{0.53}{21})$ の利率でよいことがわかる．利率3%であれば，運用期間は17.7年 $(= \frac{53}{3})$，毎月の積立金額は23,774円（= 504万円/212カ月）に変更となる．利率（3%）と積立金額（2万円）を固定した場合の運用期間は（27）式より18.85年となる．

ぞれ，24.6％，16.5％，12.0％を占めている．積立投資はまとまった資金がなくても始めることができ，本研究で示した簡単な法則を理解することによって投資に対する知識を深めるきっかけになることを期待したい．

参考文献

Brown, R.G. (1966), "The Rule of 72," *The Mathematics Teacher*, Vol.59, No.7, pp.638-639.

Financial Industry Regulatory Authority (2021), The National Financial Capability Study, State-by-State Survey. https://finrafoundation.org/sites/finrafoundation/files/NFCS-2021-State-by-State-Questionnaire.pdf（最終アクセス：2023年11月23日）

Gould, J.P. and Weil, R.L. (1974), "The Rule of 69," *The Journal of Business*, Vol.47, No.3, pp.397-398.

枇々木規雄（2021），「126ルール：積立投資の複利効果を概算する簡単な計算ルール」，『日本FP学会ニュースレター』，4（2）．https://www.jasfp.jp/newsletter04-2_0001.pdf

金融庁（2023），「NISA・ジュニアNISA口座の利用状況調査に関する調査結果（2023年6月末時点）」
https://www.fsa.go.jp/policy/nisa/20230922.html（最終アクセス：2023年11月23日）

金融広報中央委員会（2022），「「金融リテラシー調査2022年」の結果」，https://www.shiruporuto.jp/public/document/container/literacy_chosa/2022/pdf/22literacyr.pdf.（最終アクセス：2023年11月23日）

国民年金基金連合会（2023），「IDeCo公式サイト」
https://www.ideco-koushiki.jp/library/status/.（最終アクセス：2023年11月23日）

Kroopnick, A. (1979), "How Good Is the Rule of 72?," *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol.10, No.4, pp.279-280.

Luenberger, D. (2014), Investment Science, 2nd Edition, Oxford University Press.
（今野浩，鈴木賢一，枇々木規雄訳（2015）『金融工学入門第2版』，日本経済新聞出版社．）

日本証券業協会（2021），「証券投資に関する全国調査2021年度調査報告書（個人調査）」https://www.jsda.or.jp/shiryoshitsu/toukei/data/2021honbun.pdf.（最終アクセス：2023年11月23日）

大庭昭彦（2016），「新しい投資アドバイス手法と行動ファイナンス」，『財界観測』．https://www.nomuraholdings.com/jp/services/zaikai/journal/pdf/p_201604_02.pdf.

千住鎮雄，伏見多美雄，藤田精一，山口俊和（1986）『経済性分析』，日本規格協会．

Smith, W. (2000), "The 72 Rule and Other Approximate Rules of Compound Interest," *Parabola* (University of New South Wales), Vol.36, No.1. https://www.parabola.unsw.edu.au/files/articles/2000-2009/volume-36-2000/issue-1/vol36_no1_2.pdf.

Spitzer, J.J. and Singh, S. (1999), "The Rule of 72?" *Journal of Financial Counseling and Planning*, Vol.10, No.1, Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2442924

投資信託協会広報部調査広報室（2021），「積立投資モデルケース"二十歳（はたち）になったら1万円"，すべての人に世界の成長を届ける研究会」，つみけん2020年報告書「2041年，資産形成をすべての人に～5つのターゲットと15のアイデア～」，pp.104-106. https://www.toushin.or.jp/statistics/Tsumiken/hokokusyo/（最終アクセス：2023年11月23日）

Whittle, R., Duxbury, D., Werner, K. and Simister, J. (2017), "Financial rules of thumb: a review of the evidence and its implications," Money Advice Service. https://e-space.mmu.ac.uk/629985/1/RoT_Evidence_Review.pdf.（最終アクセス：2023年11月23日）