

感染症数理(SIR)モデルから何を学ぶか？ 入門と応用

日本FP学会 2020年度大会
2020年9月5日(土曜)

森平 爽一郎 (Moridaira. Soichiro)

moridaira@utexas.edu

ブログ: [パンデミックリスク](#)

(KSI顧問・慶應義塾大学 名誉教授)

注意: 以下のページで、
下線付きの青色のテキストは
、クリックすることにより、当
該URLに飛びます。引用は
それに替えます

今日学ぶこと

1. 感染症モデルの古典である「SIR」モデルを高校水準の数学で理解する
2. なぜ「人出」を8割を減らすのか？その考えのは以後にある「基本再生産数： R_0 」の数理を直感的に理解する。
3. SIRモデルをExcelを用いて実感する。
4. SIRモデルの拡張を概観する。
5. エコノミストはSIRモデルをどのように利用しているのかを知る？
6. ファイナンスにおけるSIRモデル：信用波及（Contagion）モデル
7. 感染症モデルのその他の分野への応用を知る：農学、社会学、人口学、マーケティングなど

「サイエンティフィック・アメリカン」 2011年9月号の特集号「The End」

KILLER PANDEMIC
One in 2 in the next 30 years
DESTRUCTION RANKING: 4
Humankind is more vulnerable than ever to a devastating, Black Death-style pandemic, says Joseph Fair, director of global field operations for the Global Viral Forecasting Initiative. He declined to predict when one might strike, instead rating civilization as a lowly two on a 10-point preparedness scale. The next pandemic, Fair says, will likely be a pox or a virus that is either new to humans or a more deadly adaptation of a common virus.



1. 論文 "Laying Odds on the Apocalypse" という2ページの記事が興味深い。
2. 今回のパンデミックを予測している。2011年9月からの30年間に殺人的パンデミックが2回あり得るとしており、
3. その被害の大きさはローカルな災害を1とし、この世の終わりを10とした時に4番目に位置する

4月15日メルケル首相は語る 基本再生産数 R_0 について

メルケル首相は、東ドイツ崩壊前まで、東ドイツで、理論物理学者だった。

4月15日ドイツ政府はロックダウンの段階的解除を決定。しかし、気を緩めるとどうなるかを「ロベルト・コッホ研究所(北里柴三郎の6年間留学先)」のモデルに基づいて国民に説明をした。



(感染者数の)カーブが平坦になりました。私たちの健康システムに過大な負担をかけないように、カーブをフラットに維持する必要があります。

モデルからの観測値ですが、**今の再生産数(R_0)は1です**。これは平均値ですが、1人が他の1人に感染させる数値です。

感染する人が1人から1.1人になれば、10月までに医療崩壊が生じます。

1.2人になれば、つまりいまより20%多くの人々が感染するようになると7月には医療システムの崩壊に、

1.3人になると6月に崩壊が生じます。

西村経済再生担当大臣は語る

5月17日(39の県で緊急事態宣言が解除されて初めての週末)
西村経済再生担当大臣は次のように語った。



「**全国で気の緩みが見られる**」と指摘し、感染拡大の「**第二波は必ず来る**」と述べて慎重な行動を求めました。

西村大臣「第2波、やはり来るものと思わなきゃいけないと思います。小さな波が必ず起こりますので、気を緩めたらそれが大きな波になります」

対人距離の確保、1週間早ければ 3万5000人救えた可能性 米研究

対人距離の確保、1週間早ければ3万5000人救えた可能性 米研究

2020年05月22日12時43分

【ニューヨークAFP＝時事】米コロンビア大学の研究者らは、新型コロナウイルスの感染拡大防止のため米国で3月中旬から実施されているソーシャル・ディスタンス（対人距離の確保）が1週間早く開始されていれば、同国で3万5000人以上の命が救われた可能性があるとの調査結果を発表した。（写真は米ニューヨーク・タイムズスクエアに設置されたユージーン・ジャレッキー氏制作の「トランプ・デス・クロック」）

米NYに「トランプ死の時計」、防ぎ得たコロナ死者数刻む

複数のモデルに基づくシミュレーションで、ソーシャル・ディスタンスやその他の安全措置を実際より1週間早く講じていれば、5月3日時点の米国の感染者70万人以上の61%と、死者6万5000人以上の55%を回避できた可能性があることが示されたという。



アクチュアリアル・サイエンスからの接近

1. Actuarial Science (保険数理?)
2. リスクの学問
3. 金融リスクと実物リスク
4. 実物リスク 生命と保険リスク
5. 国が抱えるリスクを測定する
6. 生命リスク(短命リスクと長寿リスク)
7. 人口動態学(Population Dynamics)

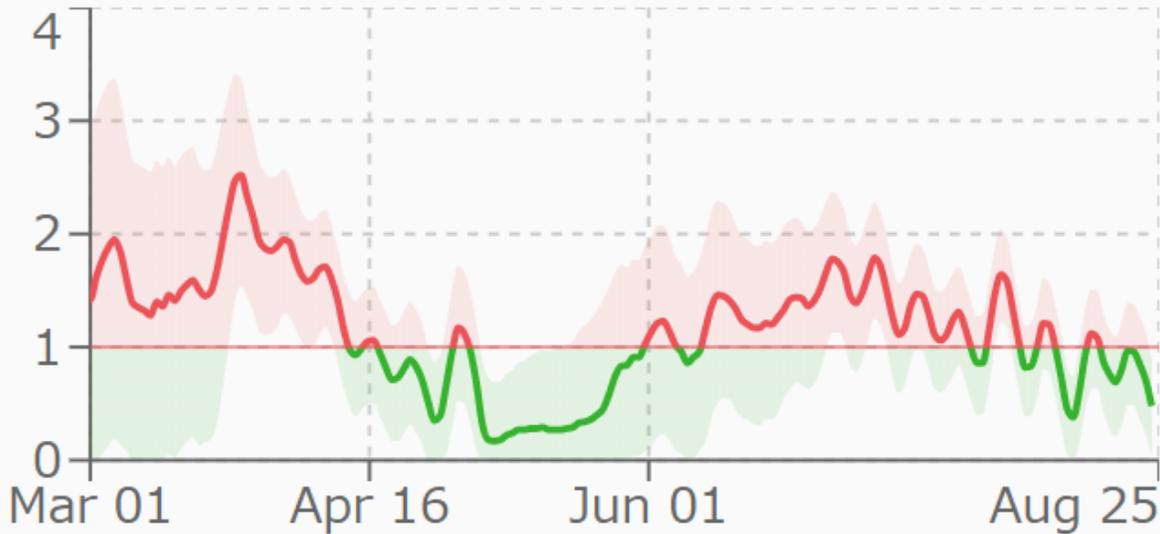
マルサスの人口法則

1. 食料は算術級数的にしか増加できない(収穫低減の法則)、しかし
2. 人口は幾何級数的に増加する。
3. したがって、人口を減らさなければならない。どのように？！
4. そこで問題になったのが、
5. 一人の女性が何人の女の子を産むのか？ 再生産数は1人以上でなければ行けない。
6. 2018年の合計特殊出生率(1人の女性が一生に何人子供を産むか)は1.42人。したがって、
7. 再生産数は $1.42/2 = 0.71$ 人。つまり、日本の人口は減少する
8. 感染症モデルでは1人の感染者が何人に感染させるか？
9. 「1」以下でなければいけない。

「 R_t Covid-19 Japan」での再生産数のリアルタイム推定

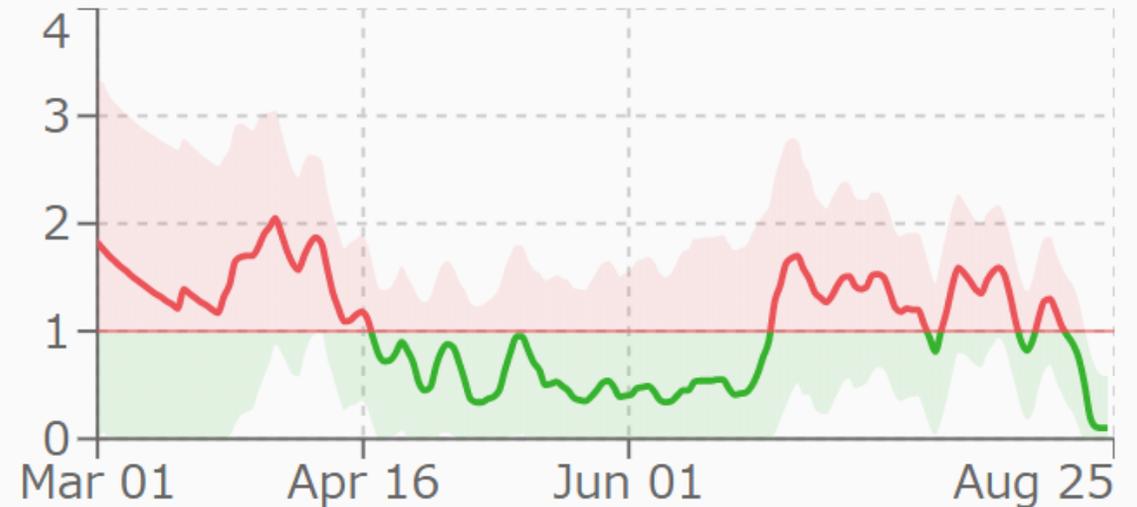
東京都

0.48



神奈川県

0.1



計算のもとに成っているモデルは、以下で説明されている。

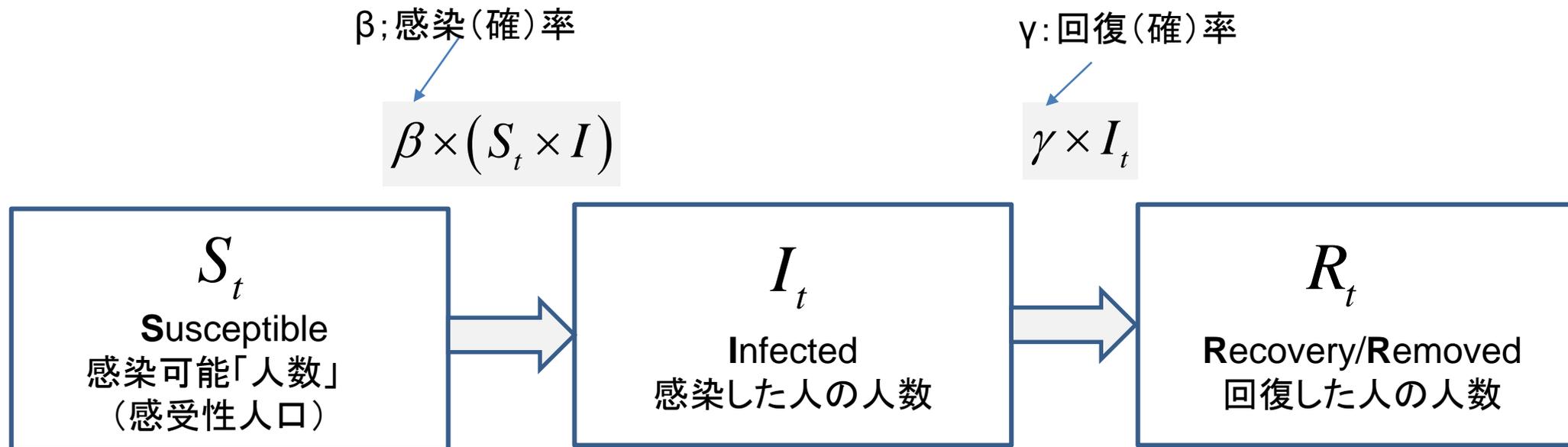
Bettencourt, L. M., and Ribeiro, R. M. (2008). Real time bayesian estimation of the epidemic potential of emerging infectious diseases. *PLoS One*, 3(5).

Kermack and McKendrick (1927)

- Kermack and McKendrick (1927)は、マルサスのこの着想にもとづき、感染症に関する「数理モデル」を、90年前に開発した。
- 90年前(昭和2年!)に発表されたモデルの
- 最も簡単なものがSIRモデルである。

SIR (Kermack and McKendrick (1927)) モデル

以下の図式はCompartmental(コンパートメント)あるいは変換図(Transfer diagram)と呼ばれる。



注意:

1) 離散時間の場合: 時間(t)は $t=0,1,2,3,\dots$,と進む。時間は通常「1日」単位

2) 全体の人数は一定(N) $S_t + I_t + R_t = N$

死ぬ人はいない。回復して抗体ができると仮定。
簡単なモデルから出発

SIRモデル: 「最も簡単な?!」感染症伝播モデル

非線形・連立・常微分方程式

Kermack and McKendrick (1927)

90年前(昭和2年)!に発表されたモデルの簡略版

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{dt} &= -\boxed{\beta S_t I_t} \\ \frac{dI_t}{dt} &= \boxed{\beta S_t I_t} - \boxed{\gamma I_t} \\ \frac{dR_t}{dt} &= \boxed{\gamma I_t}\end{aligned}$$

ここで

1. **非線形** この方程式体型で説明される(左辺にある)SとIの「掛け算したもの」が右辺にきている。
2. **連立** 3本の方程式からなっている。
3. **常微分方程式**の左辺(このモデルで説明されるもの)が時間(t)に関する微分の形をとっている。

この方程式は、「閉じた解、厳密解」は存在しない!
数値解法を用いて解く

t = 時間(日)を表す添字(t=連続時間)

S_t = t日目の感染可能な「人数」、感受性人口: Susceptible

I_t = t日目の感染した人の「人数」、Infected

R_t = t日目の回復した人の「人数」。Recovery (注意: 死亡者はいないと仮定するモデル)

β = ベータ: 感染率($S_t I_t$ 人の内で何人に感染するかの割合)。固定した値(パラメータ)。

γ = ガンマ、感染した人の内で何人が回復するかの割合)。固定した値(パラメータ)。

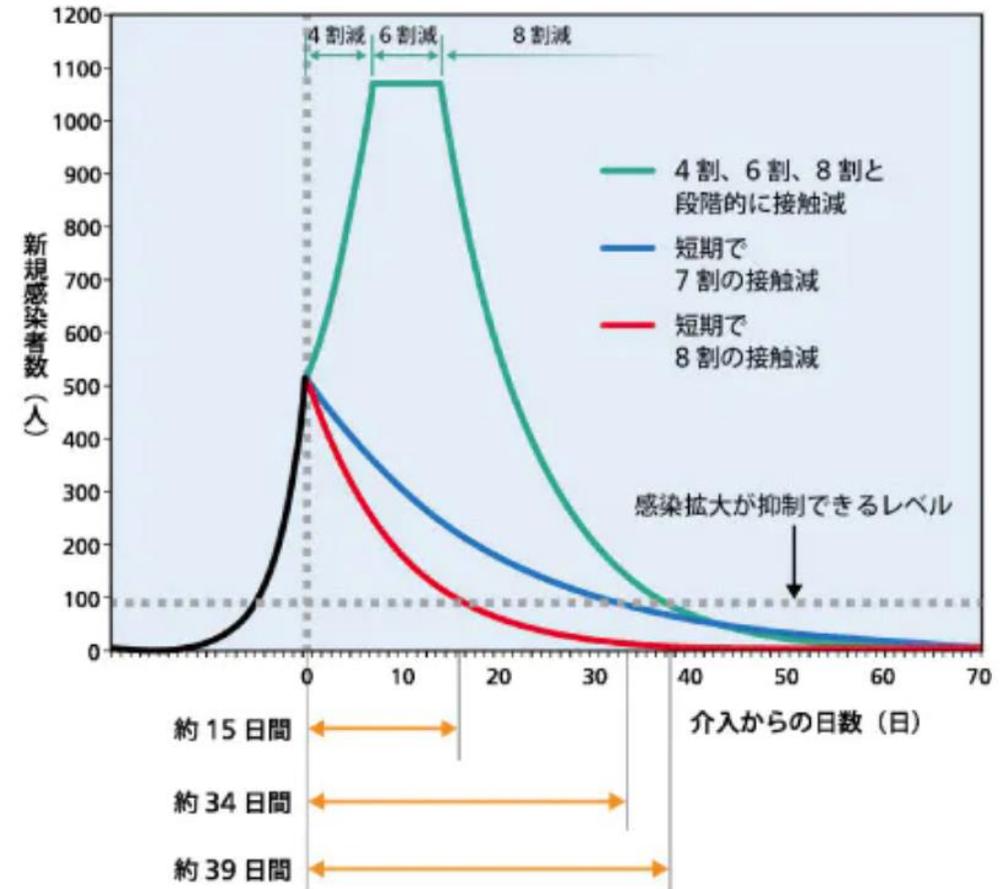
なぜ接触を80% ($\alpha=0.8$) 減らすのか

西浦モデル(西浦博、北海道大学): SEI-RRモデル

$$(1 - \alpha) R_0 < 1.0$$

基本再生産数=2.5
と仮定

を満足する $\alpha=0.8=80$ パーセントとすれば
1日500人の感染者数から緊急事態宣言前の1日100
人までに減らすために、15日間でよい
(赤い実線)



日経新聞電子版、2020/4/25 日経サイエンス2020年6月号
新型コロナウイルス感染症、接触削減「8割必要」モデルで算出

「8割おじさん」の数理モデル

米国の週刊誌Newsweek誌の日本語版『ニューズウィーク日本版』の最新の[2020年6月9日号](#)では「日本モデル」と題した特集号で、北海道大学医学部の西浦教授が、「8割おじさん」の数理モデル」という論文を寄稿している。冊子体の本誌でも読めるし、また楽天マガジン・dマガジンなどのオンラインの雑誌読み放題でも全てのページが配信されている。

ニューズウィークとしては異例のアカデミックな論文である。数式こそ無いものの、変数名や学術用語が散見される異例の論文に成っている。同誌で経済や政治関係の記事に親しんでいる人にとっては、ちょっと難しい論文かもしれない。

しかし、非常に示唆に富んだ論文である。特に、「8割削減」の意味を丁寧に説明している。最近、8割削減に関して、そこまでする必要がなかったという批判があちこちから出ているが、これをよんでから批判をすべきであろう。



続き

疫学における感染症モデルは勿論、マクロ経済や資産価格決定モデル（CAPMやブラック＝ショールズモデルなど）も、所詮は複雑な現実の抽象化に過ぎない。しかし、よいモデルというのは、抽象の革新をつかみ、リスク管理を行う場合、大きな間違いをしない基準となりうる。

また、この号では、“日本のコロナ対策は過剰だったか”という、西浦教授と國井修（世界エイズ・結核・マラリア対策基金）との対談記事も掲載されている。ともに医者さんでありかつモデリングを研究している二人の言葉は、経済やファイナンスのモデルを用いて仕事をしている、アナリスト、エコノミスト、研究者にとっても学ぶことが大きいとおもう。

國井氏はこう述べている「・・・私達モデラーはリスク評価についてはアンダーアクト（控えめに言う）よりは、オーバーリアクト（大げさに言う）して話をすべきと、肝に命じながらやってきた・・・」

西浦モデル

$$\frac{dX_{00}}{dt} = \lambda(t) - (\gamma_1 + \alpha(t))X_{00}(t)$$

$$\frac{dX_{01}}{dt} = \gamma_1 X_{00}(t) - (\gamma_2 + \alpha(t))X_{01}(t)$$

$$\frac{dX_{02}}{dt} = \gamma_2 X_{01}(t) - (\gamma_3 + \alpha(t))X_{02}(t)$$

$$\frac{dX_{10}}{dt} = \alpha(t)X_{00}(t) - \gamma_1 X_{10}$$

$$\frac{dX_{11}}{dt} = \gamma_1 X_{10} + \alpha(t)X_{01}(t) - \gamma_2 X_{11}$$

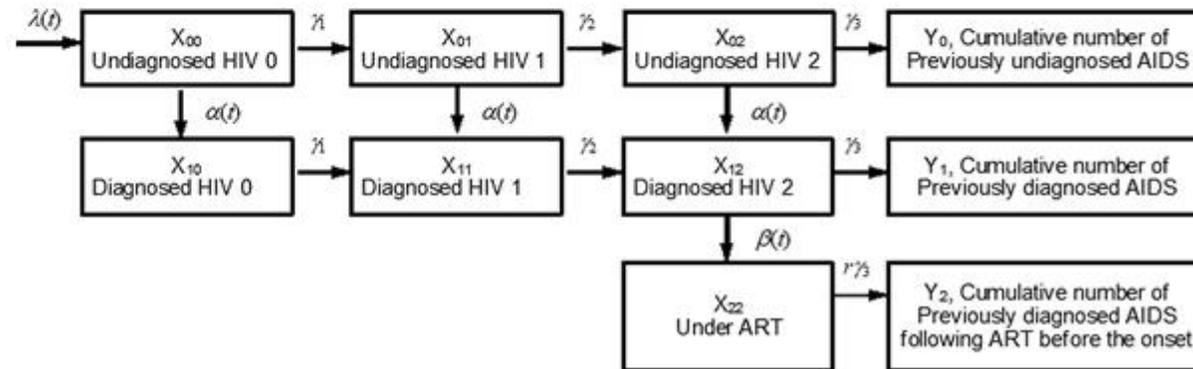
$$\frac{dX_{12}}{dt} = \gamma_2 X_{11} + \alpha(t)X_{02}(t) - (\gamma_3 + \beta(t))X_{12}$$

$$\frac{dX_{22}}{dt} = \beta(t)X_{12}(t) - r\gamma_3 X_{22}$$

$$\frac{dY_0}{dt} = \gamma_3 X_{02}$$

$$\frac{dY_1}{dt} = \gamma_3 X_{12}$$

$$\frac{dY_2}{dt} = r\gamma_3 X_{22}$$



SIRモデル: 感染症伝播モデル

非線形・連立・常微分方程式

Kermack and McKendrick (1927)
90年前(昭和2年)!に発表されたモデルの簡略版

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{dt} &= -\boxed{\beta S_t I_t} \\ \frac{dI_t}{dt} &= \boxed{\beta S_t I_t} - \boxed{\gamma I_t} \\ \frac{dR_t}{dt} &= \boxed{\gamma I_t}\end{aligned}$$

ここで

1. **非線形** この方程式体型で説明される(左辺にある)SとIの「掛け算したもの」が右辺にきている。
2. **連立** 3本の方程式からなっている。
3. **常微分方程式**の左辺(このモデルで説明されるもの)が時間(t)に関する微分の形をとっている。

この方程式は、「閉じた解、厳密解」は存在しない!
数値解法を用いて解く

t=時間(秒!)を表す添字(t=連続時間)
S_t=t秒目の感染可能な「人数」、感受性人口: Susceptible
I_t=t秒目の感染した人の「人数」、Infected
R_t=t秒目の回復した人の「人数」。Recovery (注意: 死亡者はいないと仮定するモデル)
β = ベータ: 感染率(S_tI_t人の内で何人に感染するかの割合)。固定した値(パラメータ)。
γ = ガンマ、感染した人の内で何人が回復するかの割合)。固定した値(パラメータ)。

「微分方程式」で無く、「差分方程式」で説明

「差分方程式」と言っても難しく考える必要はない。高校数学Bの「数列」、特に、等差数列、等比数列がわかれば、大丈夫、ここでは、それらが分からなくても問題ありません。

dt: では連続的な時間変化differentiaを示す、例えて言えば、正確ではないが、**1秒刻み**

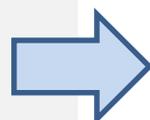
Δt : は時間tの変化が「離散的」。ここでは、**1日刻み**。 $\Delta t=1$ 日とする。

dS_t , dI_t , dR_t も1日単位の人数変化と考えることにする。従って、 ΔS_t , ΔI_t , ΔR_t と書く。

$$\frac{dS_t}{dt} = -\beta S_t I_t$$

$$\frac{dI_t}{dt} = \beta S_t I_t - \gamma I_t$$

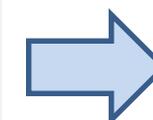
$$\frac{dR_t}{dt} = \gamma I_t$$



$$\left(\frac{\Delta S_t}{\Delta t} = \frac{\Delta S_t}{1} = \Delta S_t = S_t - S_{t-1} \right) = -\beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$\left(\frac{\Delta I_t}{\Delta t} = \frac{\Delta I_t}{1} = \Delta I_t = I_t - I_{t-1} \right) = \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$\left(\frac{\Delta R_t}{\Delta t} = \frac{\Delta R_t}{1} = \Delta R_t = R_t - R_{t-1} \right) = \gamma I_{t-1}$$



これらをまとめて
書くと、

次ページへ

t は「秒」単位

©森平

t は「日」単位

第12章

18

「差分方程式」で説明する

$$\left(\frac{\Delta S_t}{\Delta t} = \frac{\Delta S_t}{1} = \Delta S_t = S_{t+1} - S_t \right) = -\beta S_t I_t$$

$$\left(\frac{\Delta I_t}{\Delta t} = \frac{\Delta I_t}{1} = \Delta I_t = I_t - I_{t-1} \right) = \beta S_t I_t - \gamma I_t$$

$$\left(\frac{\Delta R_t}{\Delta t} = \frac{\Delta R_t}{1} = \Delta R_t = R_t - R_{t-1} \right) = \gamma I_t$$

$$S_{t+1} - S_t = -\beta S_t I_t$$

$$I_{t+1} - I_t = \beta S_t I_t - \gamma I_t$$

$$R_{t+1} - R_t = \gamma I_t$$

式(1)

$$S_{t+1} = S_t - \beta S_t I_t$$

式(2)

$$I_{t+1} = I_t + \beta S_t I_t - \gamma I_t$$

式(3)

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t$$

最初の式(1)
を言葉で説明
すると

$$S_{t+1} = S_t - \beta (S_t I_t)$$

今日(t)の感染可能人数

昨日(t-1)の感染可能人数

感染率 × (昨日(t-1)の感染可能人数 × 昨日の感染人口)

高校での
「等比数列の和」の議論から
理解できる。

直感的な理解 1

式(1)の右辺: $-\beta(S_{t-1}I_{t-1})$ の意味

第1日目($t=1$)からみて、昨日($t=0$)で、

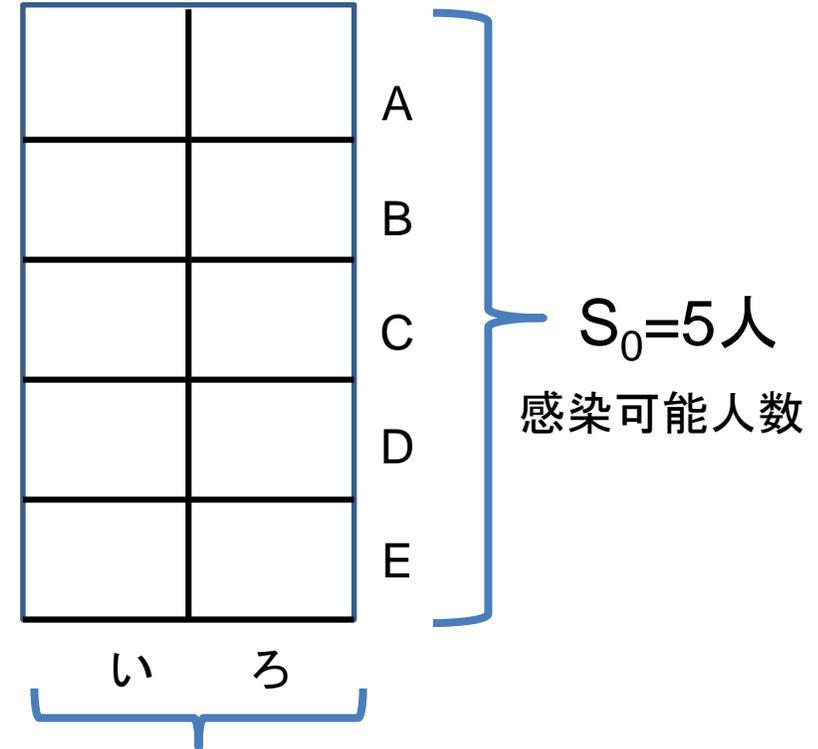
1) 感染予備人口が5人 $S_0=5$ 人

2) 感染した人が2人、 $I_0=2$ 人

いたとしよう

$$S_0 \times I_0 = 5人 \times 2人 = 10人$$

升目の数



$I_0=2$ 人 感染した人の人数

は何をあらわしているのか？

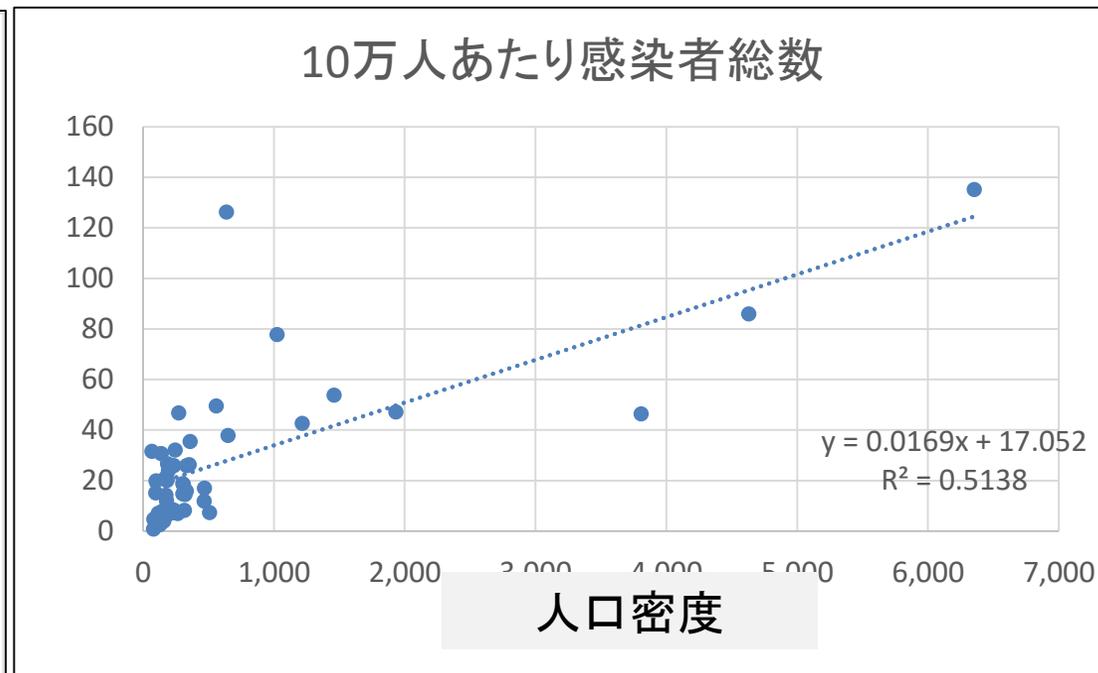
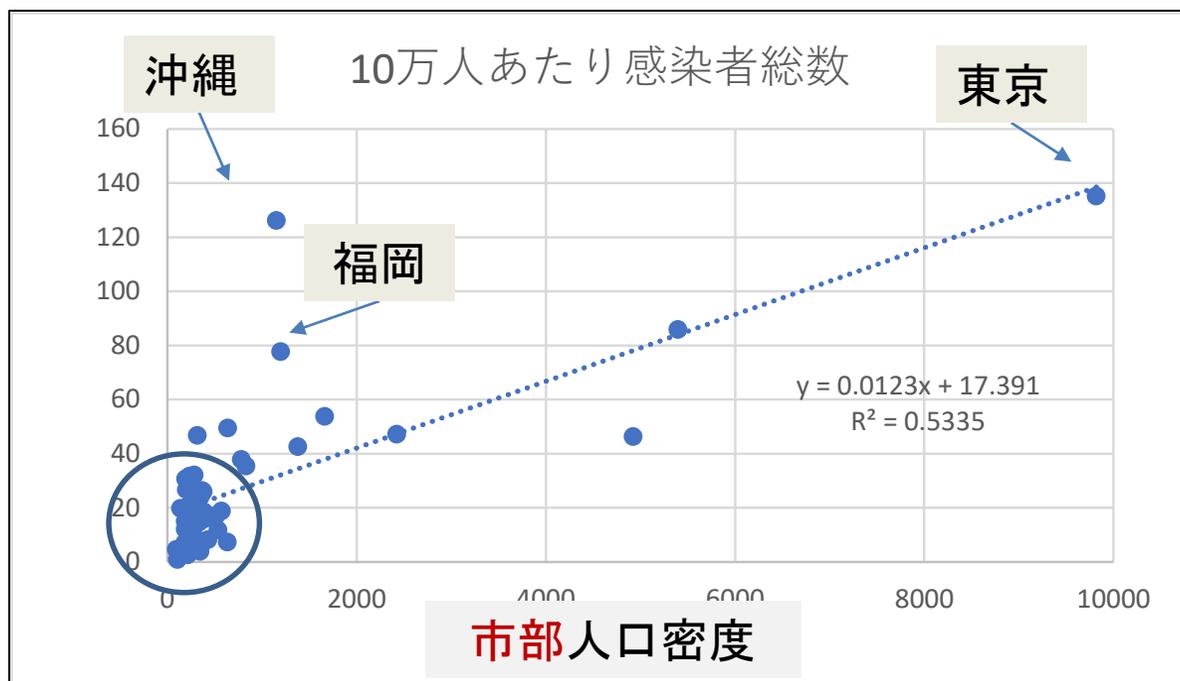
感染者が感染していない人に接触する可能な件数(高校数学では「場合の数」という)。

しかし、だからと言って、すべての人が必ず感染するわけでない。例えば、免疫力を持っている人(BCG接種者、**交差免疫者**の増大など?)、既に感染をしていて二次感染の恐れがない人など)、出会いがない可能性の人もある。

1人の感染者が、1人の感染可能者に会い、1日間で、感染する「確率(比率)」を β とする。従って、 $\beta(S_{t-1}I_{t-1})$ は実際に感染した人数をしめす。従って、

注: 化学における触媒を用いた反応法則で説明する考え方もある。Simon, C. (2020). The SIR dynamic model of infectious disease transmission and its analogy with chemical kinetics.

直感的な理解 2: データの裏付け



47都道府県の9月20日現在の
10万人あたり感染者数累計(縦軸)と
人口密度(人/km²)の関係

1日目の感染可能な人数: S_1 は

感染可能人口の「減少分」

$$S_1 = S_0 - \beta (S_0 I_0)$$

今日 (t=1) の感染可能人数

昨日 t=0 の感染可能人数

感染率 \times (昨日 (t=0) の感染可能人数 \times 昨日 (t=0) の感染人口)

数値例:

$S_0=100$ 人、 $I_0=1$ 人、感染(確)率 $\beta=1\% = 0.01$

$$S_1 = S_0 - \beta (S_0 I_0) = 100 - 0.01(100 \times 1) = 99$$

人

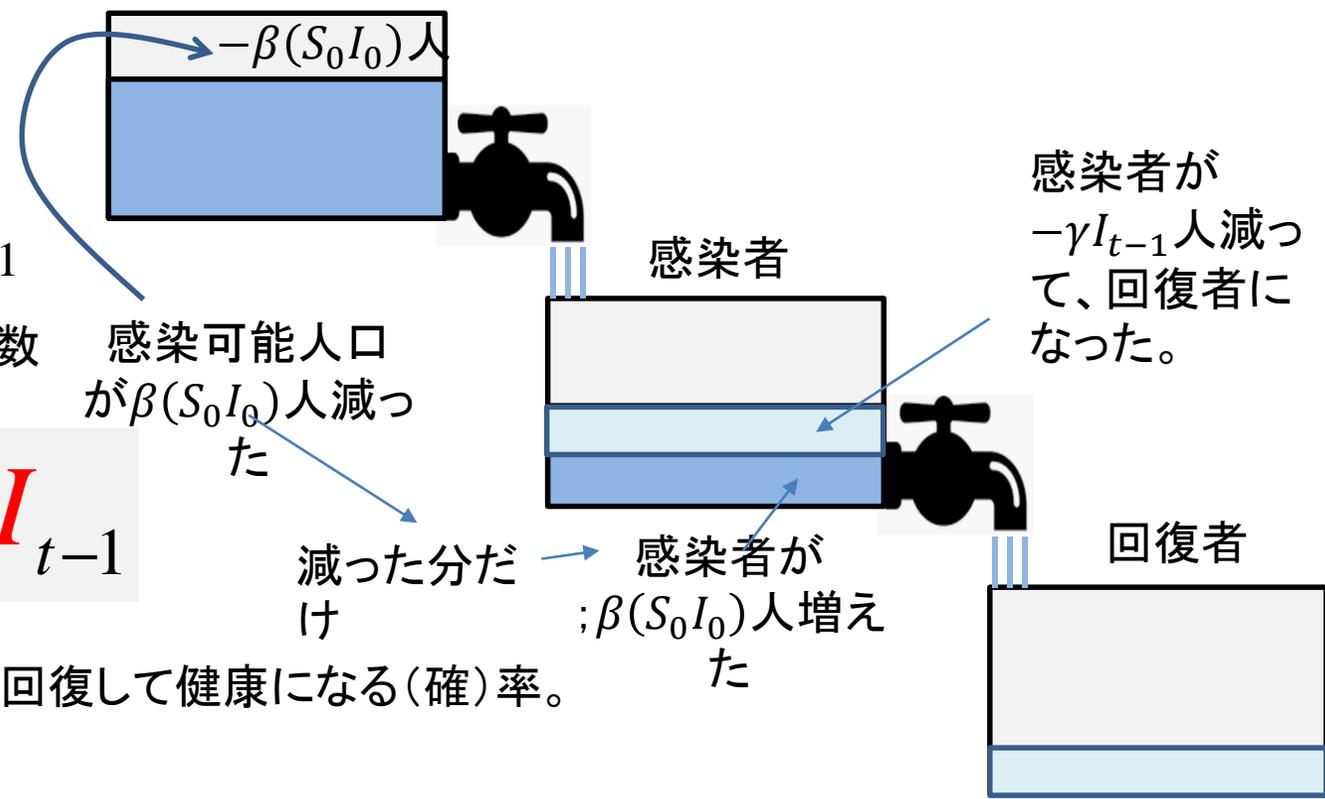
式(2)の右辺: $\beta S_t I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$ の意味

式(1) $S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$

式(2) $I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$

新規感染者数 回復者数

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$



γ (ガンマ)はt-1日目の感染者 I_{t-1} の中で1日あたり、回復して健康になる(確)率。
従って、 $\gamma \times I_{t-1}$ はt日目の回復者数

数値例 回復率 $\gamma=0.5=50$ パーセント

$$I_1 = I_0 + \beta S_0 I_0 - \gamma I_0 = 1 + 0.01(100 \times 1) - 0.5 \times 1 = 1.5 \text{ 人}$$

回復者 R_t が γI_{t-1} 人増えた

式(3)の意味

$$S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \boxed{\gamma I_{t-1}} \quad \text{回復者として感染者から減った(マイナス記号)人数: } -\gamma I_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} + \boxed{\gamma I_{t-1}} \quad \text{新しく増えた回復者数: } +\gamma I_{t-1}$$

今日の回復者(R_t) = 昨日の回復者(R_{t-1}) + 新規の回復者数: γI_{t-1}

数値例 回復率 $\gamma = 0.5 = 50$ パーセント

$$R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1} = 0 + 0.5 \times 1 = 0.5 \text{ 人}$$

Excelで感染症の伝播をシミュレーション

[https://www.blogger.com/blog/post/edit/6320983857251180491/
5819987002886974843](https://www.blogger.com/blog/post/edit/6320983857251180491/5819987002886974843)

から以下のエクセルシートをダウンロードできます

Excelを用いたシミュレーション

うす緑のところが入力すべきデータ

注: Googleのスプレッドシートでも動きます。

今日
初期値

予測値

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t:日	S:感染可能人数	I:感染数	R:回復数	N:合計		β :感染率	γ :回復率	α :削減率	Rt:再生産数
2	0	100	1	0	101		0.010	0.100	0.800	10.000
3	1	99.0000	1.9000	0.1000	101.0000					9.900
4	2	97.1190	3.5910	0.2900	101.0000					9.712
5	3	93.6315	6.7194	0.6491	101.0000					9.363
6	4	87.3399	12.3390	1.3210	101.0000					8.734
7	5	76.5631	21.8820	2.5549	101.0000					7.656
8	6	59.8095	36.4473	4.7431	101.0000					5.981
9	7	38.0106	54.6016	8.3879	101.0000					3.801

$$S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_t I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$$

t=1日目
の予測

$$S_1 = S_0 - \beta S_0 I_0 = 100 - 0.01 \times 100 \times 1 = 99$$

$$I_1 = I_0 + \beta S_0 I_0 - \gamma I_0 = 1 + 0.01 \times 100 \times 1 - 0.1 \times 1 = 1.9$$

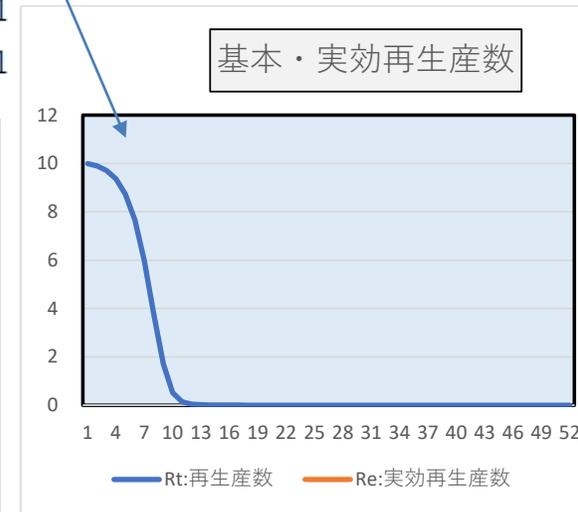
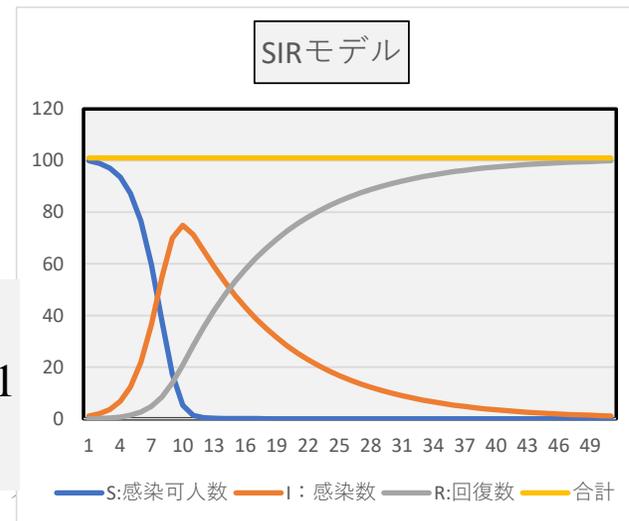
$$R_1 = R_0 + \gamma I_0 = 0 + 0.1 \times 1 = 0.1$$

t=2日目
の予測

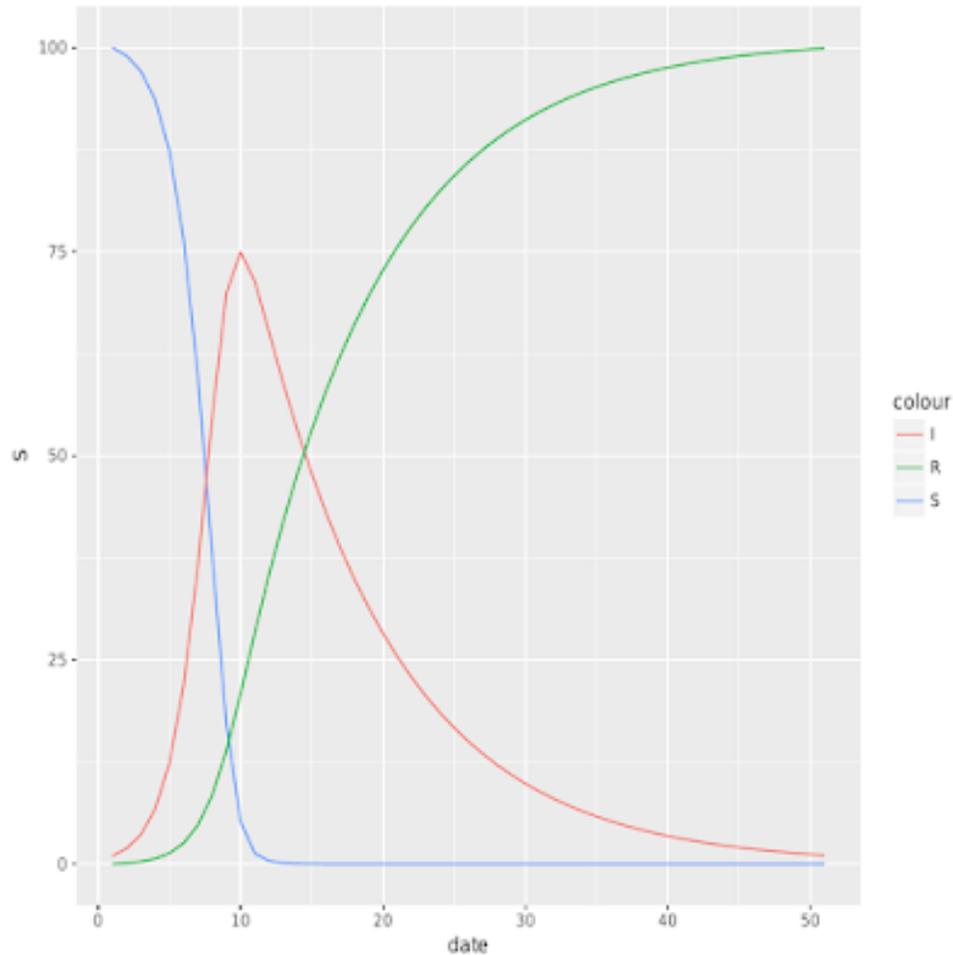
$$S_2 = S_1 - \beta S_1 I_1 = 99 - 0.01 \times 99 \times 1.9 = 97.119$$

$$I_2 = I_1 + \beta S_1 I_1 - \gamma I_1 = 1.9 + 0.01 \times 99 \times 1.9 - 0.1 \times 1.9 = 3.591$$

$$R_2 = R_1 + \gamma I_1 = 0.1 + 0.1 \times 1.9 = 0.29$$



統計言語[R]によるシミュレーション



<https://www.blogger.com/blog/post/edit/6320983857251180491/4909527932763504474>

SIRモデルの特徴を知る

1. 総人口に関する制約条件

$$\text{式(1)} \quad S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$\text{式(2)} \quad I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$\text{式(3)} \quad R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$$

式(1)から式(3)の両辺を合計すると

$$\underbrace{S_t + I_t + R_t}_{\text{t日目のすべての人の数}} = \underbrace{S_{t-1} + I_{t-1} + R_{t-1}}_{\text{(t-1)日目のすべての人の数}}$$

であることは何を意味しているか？
どの日でも全ての人の数は変わりが無い。



$$S_t + I_t + R_t = N \quad \text{人と置く}$$

これは毎日、何時でも、満たされなければいけない条件である。であるので、式(1)から式(3)の3つの微分方程式は必要ない。3つのうちの2つを用いて、解を求め、その結果を式(4)に代入すれば、残りの1つの状態変数の値はわかる。

重要

2. 基本再生産人数: R_0 とは何か？

$$\begin{aligned} \text{式(2)} \quad I_{t+1} &= I_t + \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ \Rightarrow I_{t+1} - I_t &= (\beta S_t - \gamma) I_t \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{I_{t+1} - I_t}{I_t}} &= (\beta S_t - \gamma) \end{aligned}$$

左辺の「感染者数の伸び率」が0を超える(下回る)と、感染人口 I_t は増加(減少)する
言い換えれば、右辺が

$$\begin{aligned} \beta S_t - \gamma &> 0 \\ \Rightarrow S_t &> \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned}$$

であれば、感染者は増加する。
両辺を γ/β で割ると

$$\bar{R}_t \equiv S_t \frac{\beta}{\gamma} > 1$$

時点 t での「再生産人数」。もし1以上であれば、今後、感染は拡大する。

$$\bar{R}_0 \equiv S_0 \frac{\beta}{\gamma} > 1$$

をこれを初期時点 $t=0$ で書き直したものを伝染病の「**閾値定理**」と呼ぶ。もし、1以上ならこのままの状態が続けば感染拡大

$$\bar{R}_0 \equiv N \frac{\beta}{\gamma}$$

更に、 S_0 を総人口 N で置き換えたものを、時点ゼロでの「**基本再生産数**」と呼ぶ。1以上であれば感染拡大を意味する。

基本再生算数 \bar{R}_0 とは

- 1) 初期時点 $t=0$ で、
- 2) 1人の人が、
- 3) 回復して免疫を有するか、あるいは、
- 4) 死亡するまでに、
何人を感染させるか
を示す。

注:最初の時点($t=0$)では、感染 S_0 はほぼゼロなので、 $S_0=N$ とすることができる。全ての人々が、免疫(個体)を持たずに、ある1人が何人の他人を感染させるかしめす「期待(平均)値」。

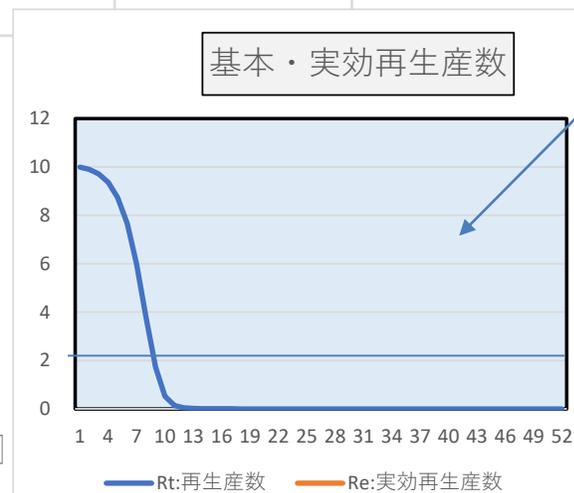
基本再生産数 R_0 と再生産数 R_t

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t:日	S:感染可能人数	I:感染数	R:回復数	N:合計		β :感染率	γ :回復率	α :削減率	Rt:再生産数
2	0	100	1	0	101		0.010	0.100	0.800	10.000
3	1	99.0000	1.9000	0.1000	101.0000					9.900
4	2	97.1190	3.5910	0.2900	101.0000					9.712
5	3	93.6315	6.7194	0.6491	101.0000					9.363
6	4	87.3399	12.3390	1.3210	101.0000					8.734
7	5	76.5631	21.8820	2.5549	101.0000					7.656
8	6	59.8095	36.4473	4.7431	101.0000					5.981
9	7	38.0106	54.6016	8.3879	101.0000					3.801

$$S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_t I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$$



$R_t=1$ 人

まとめ：基本再生産数と実効再生産数

基本再生産数とは

$$\bar{R}_0 \equiv N \frac{\beta}{\gamma}$$

[御蔵島の例](#)でしめたように、

ある1人の感染者(村議会議長)が、感染するかもしれない他の村民に対し、平均して何人に感染させるかを示す数値。時点ゼロで何もしなかったら、何人の感染者を発生させるのかを示す。

実効再生産数とは

$$\bar{R}_t \equiv S_{t-1} \frac{\beta}{\gamma}$$

何らの処置を行っていけば、どうなるかの数値。T日目に何らかの対策が行われていけば、上の式を考える。

重要な点

実効再生産数は、 β と γ の比である。それぞれは不確実に変動する可能性がある。確率変数の「比」の平均値と分散を、理論的に検討すると、非常に複雑になる。

t日目の再生産数 R_t の直感的な理解

$$\bar{R}_t \equiv S_{t-1} \frac{\beta}{\gamma}$$

感染率 β

回復率 γ

の比になっている

↓
昨日の感染するかもしれない人数

つまり

感染率が回復率より大きければ(小さければ、等しければ)感染者数(は時間の減少関数なので)は、増加(減少、一定(初期感染者数 S_0 のまま))である。

基本再生産数 R_0 の実際

稲葉寿 (2015) 「基本再生産数 R_0 の数理」の表1より再掲

感染症	Location and time period	R_0
麻疹 はしか	England and Wales, 1947-50	13-14
	Ghana, 1960-68	14-15
おたふく風邪	England and Wales, 1960-80	11-14
	Netherlands, 1970-80	11-14
風疹 三日はしか	England and Wales, 1960-70	6-7
	Poland, 1970-77	11-12
	Gambia, 1976	15-16
百日咳	England and Wales, 1944-78	16-18
	USA, 1943	16-17
ポリオ	Netherlands, 1960	6-7
天然痘	West Africa, 1968-73	3-5
HIV	Uganda, 1985-87	10-11

COVID-19の基本再生産数
は2から2くらいではないか？

ワクチンあり
絶滅できた
特効薬あり

出典：Modelling Epidemics, P. Farrington, The Open University 2008.

$\frac{1}{\gamma}$ は平均感染期間を示す

$$\bar{R}_t \equiv S_{t-1} \frac{\beta}{\gamma} = S_{t-1} \beta \left[\frac{1}{\gamma} \right] = \text{t日目の感染可能人数} \times \text{感染率} \times \text{平均感染期間}$$

証明：必ずしも理解しなくてもよい。

式(2) $I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$ は感染人数を表す差分方程式、ここで、感染人数の減少、つまり、感染⇒回復に関する部分だけを取りだすと、

$$\text{式(2)'} \quad I_t = I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$\text{1日目} \quad I_1 = I_0 - \gamma I_0 = (1 - \gamma) I_0$$

$$\text{2日目} \quad I_2 = I_1 - \gamma I_1 = (1 - \gamma) I_1 = (1 - \gamma)(1 - \gamma) I_0 = (1 - \gamma)^2 I_0$$

⋮

$$\text{t日目} \quad I_t = (1 - \gamma)^t I_0 \approx e^{-\gamma t} I_0$$

eはネピア数。それを e^x を $X=0$ nの周りでテイラー展開をして0次と1次の項だけを取りだすと $(1+x)$ になる。両辺をt乗する。

$$e^x \approx (1+x) \Rightarrow (e^x)^t = e^{xt} \approx (1+x)^t$$

ここで、xは式(2)'の感染人数の減少(回復)で回復率:- γ にあたる。

$\frac{1}{\gamma}$ は平均感染期間を示す：その理解

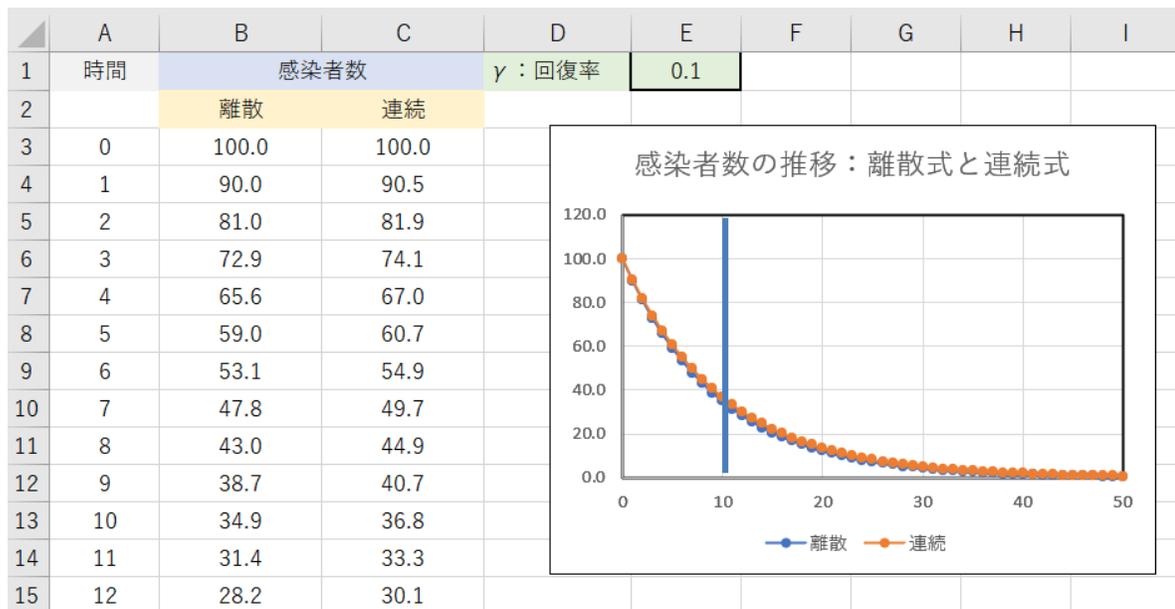
$I_t = (1 - \gamma)^t I_0 \approx e^{-\gamma t} I_0$ この近似は回復率 γ が小さいときには良いが、ガンマが大きな値であると良くない

$$\frac{I_t}{I_0} = \boxed{e^{-\gamma t}}$$

と変形し、ガンマの意味を考えてみよう。

ここで、時間 t は回復までの推移(回復期間)をしめしている。さらに

回復期間 t が確率変数だとかんがえてみよう。



$$e^{-\gamma t} = \Pr(\tilde{T} > t)$$

は、不確実な回復期間 T が「指数分布」に従うと仮定したときに、それが t 日以上である確率(生存確率と呼ばれる)に等しい。

$\frac{1}{\gamma}$ は平均感染期間を示す：その理解（続き）

不確実な回復までの期間（病気に感染している時間） T の平均（期待）値は、指数分布を仮定したので、

$$E[\tilde{T}] = \frac{1}{\gamma}$$

詳しい証明については、初等の数理統計のテキスト、あるいは初等の統計学の本でやや詳しいもの、例えば Taro Yamane *Statistics*, を参考にしてください。

注意1： 指数分布の形状、従って、その平均や分散は、 γ だけできまる。

注意2： 指数分布の平均と分散は等しい（厳しい仮定、現実には合わない、分散のほうが平均より大きい（過分散）、「平均回復期間＝回復期間の分散」であることのほうが普通

注意3： 回復率の推定は、ちょっと難しいかもしれないが、COVID-19にかかった人の平均入院期間を計算できれば、回復率ガンマの推定は可能。

注意4： $\gamma = r_F$ （リスクフリーレート）としたときの意味は何か？

注意4： T が倒産までに至る時間と考えたときの γ の意味は何か？

再生産数： \bar{R}_t から導かれるリスク管理

$$\bar{R}_t \equiv S_{t-1} \frac{\beta}{\gamma}$$

感染率

回復率

1. 感染(確)率を下げる

- 1) Social distancing (3密を避ける)。
- 2) Stay at home (巣籠り)。
- 3) 手を洗う
- 4) マスクをする。土足厳禁、
- 5) 一般的な健康管理(よく寝る！！)
- 6) 此等に対する経済手段

2. 回復(確)率を上げる

- 1) 医療資源(医者と看護師さん、と設備(人工呼吸器、エクモ))
- 2) 薬の開発(アビガン、クロロキシン、シクレソニドなどなど)
- 3) 此等に対する経済手段

3. S_t に対してはどのような手段があるか？

- 1) 殺処分(唐物の場合)
- 2) ワクチンの開発(100以上のプロジェクトが進行と接種)
- 3) 抗体検査
- 4) 外出制限

今できることは「これ！」しかない。



Schünemann, H. J. (2020). Physical distancing, face masks, and eye protection to prevent person-to-person transmission of SARS-CoV-2 and COVID-19: A systematic review and meta-analysis. *The Lancet*,. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)31142-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)31142-9)

3. なぜ接触を80% ($\alpha=0.8$) 減らすのか

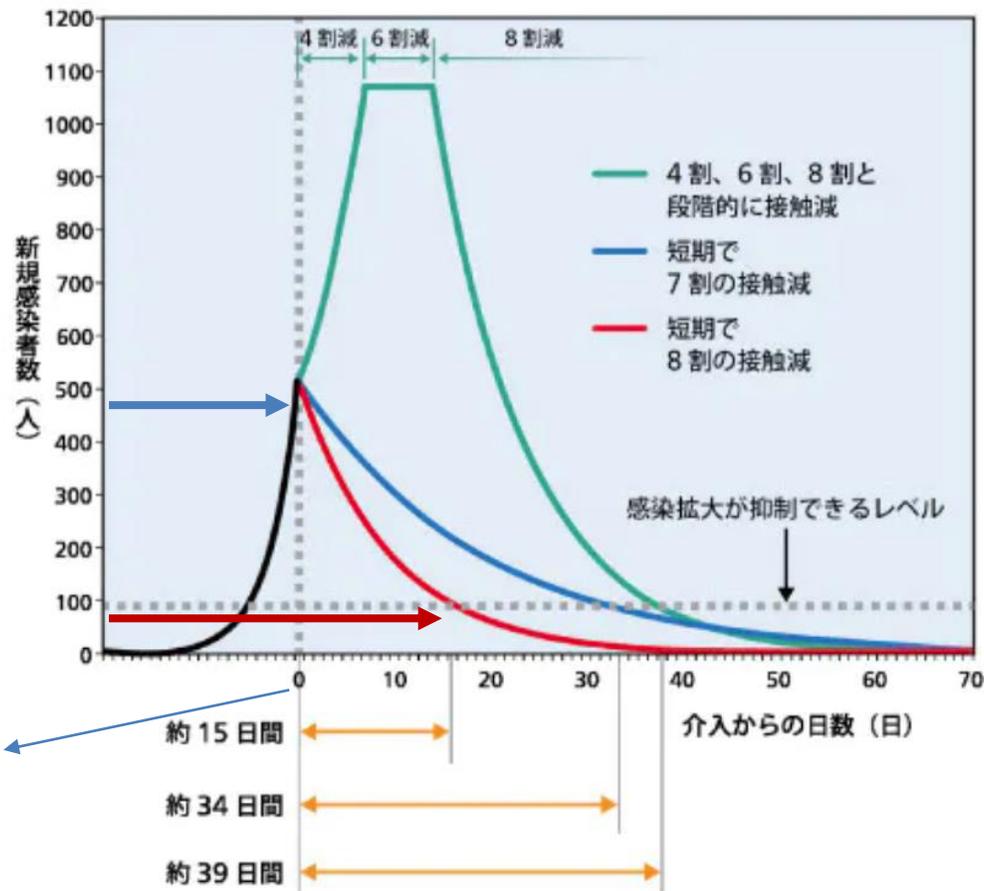
$$\bar{R}_e \equiv (1 - \alpha) \bar{R}_0 < 1.0$$

実効再生産数; Re

$$\alpha = 1 - \frac{1}{R_0}$$

を満足する $\alpha=0.8=80$ パーセントとすれば
 1日500人の感染者数から緊急事態宣言前の1
 日100人まで減らすために、15日間でよい
 (赤い実線)

$$\bar{R}_e = (1 - \alpha) N \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) < 1.0$$



時点 $t=0$

日経新聞電子版、2020/4/25 日経サイエンス2020年6月号
 新型コロナウイルス感染症、接触削減「8割必要」モデルで算出

3. 実効再生産数: R_e とは ワクチンの接種率を決める

$$(1 - \alpha) \bar{R}_0 = \boxed{(1 - \alpha) N} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) < 1.0$$

8割の人にワクチンを接種すれば、感染拡大は止められる。

4. 集団免疫

もう一つのリスク管理：感染者 I_t を増やす?!

スウェーデンは、特段の厳しい外出規制(Lock down)を行わない。他の北欧の国と比較して、死亡者がダントツに多い。なぜか？

感染者は、一度感染すると、抗体を持ち、再度感染することがない。従って、感染していない人が、抗体を持った人と接触しても感染しない。集団Nが免疫をもつことになる。結果として感染者数(と死者)をへらす。

本当か？ Newsweek誌は「[集団免疫](#)」作戦のスウェーデンに異変、死亡率がアメリカや中国の2倍超に：Sweden's Coronavirus Death Rate Nearly Double That of U.S」でこれに疑問としている。

ただし、こうした集団免疫戦略が成立するのは、実効再生産数が1かそれ以下に成っているときである。そうでないと、感染者数は増加する。

右の図については[ここ](#)を参照
集団免疫「率」とは再生産数が1となるような免疫率(感染して免疫を持った人の割合)

■ 再生産数と集団免疫率、死亡率の関係

再生産数	1.1	1.5	1.7	2	2.5	3	3.5
集団免疫率	9%	33%	41%	50%	60%	67%	71%
死亡率	0.2%	0.7%	0.8%	1.0%	1.2%	1.3%	1.4%

(注) 死亡率は、集団免疫率に達した時点での死亡数の集団人口対比。新型コロナウイルスの致死率(死亡数/感染者数)を2%として試算(出所) 東洋経済作成

再生産数 R_t の応用事例？

人口動態論でも「基本再生産数」を問題にする。経済学者「マルサス」は、

「女の人が、一生で、**女の子**を何人産むか」を議論した。これが1以下であると、日本人はいつか滅亡する。

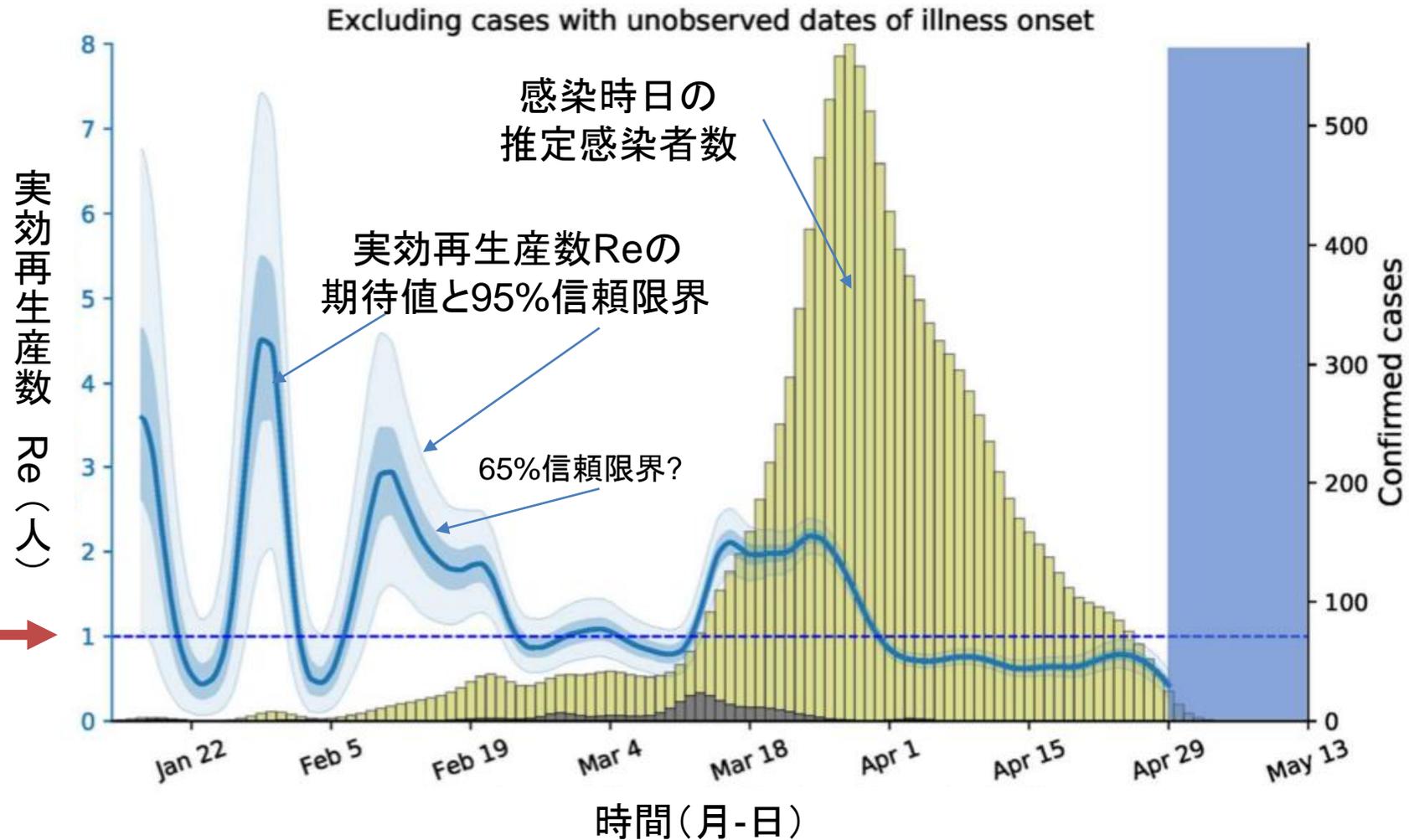
その他

マーケティング。新製品の普及
人口移動(移民)
コンピュータウイルスの感染
ネットでの「炎上」、流言飛語
倒産の連鎖(金融規制)
失業の連鎖

などの分析にも使われる。

実効再生産数 R_e の推定：全国

新型コロナウイルス感染症対策専門家会議「新型コロナウイルス感染症対策の状況分析・提言」2020年5月14日



実効再生産数が1を下回った。収束に向かっている証拠？

実効再生産数 \bar{R}_e は変動する

$$\bar{R}_t \equiv S_{t-1} \frac{\beta}{\gamma}$$

感染率

回復率

それぞれは標本推定値として得られる。従って、真の値は一定値であるとしても、その推定値は確率変数。

あるいは「ベイズ統計学」の観点からして、この2つは本質的に確率変数。

重要な点

実効再生産数は、 β と γ の比である。それぞれは不確実に変動する可能性がある。確率変数の「比」の平均値と分散は、例えば、正規分布すると仮定しても、非常に複雑になる。特に、この2つが相関をもつと、その点がいえる。

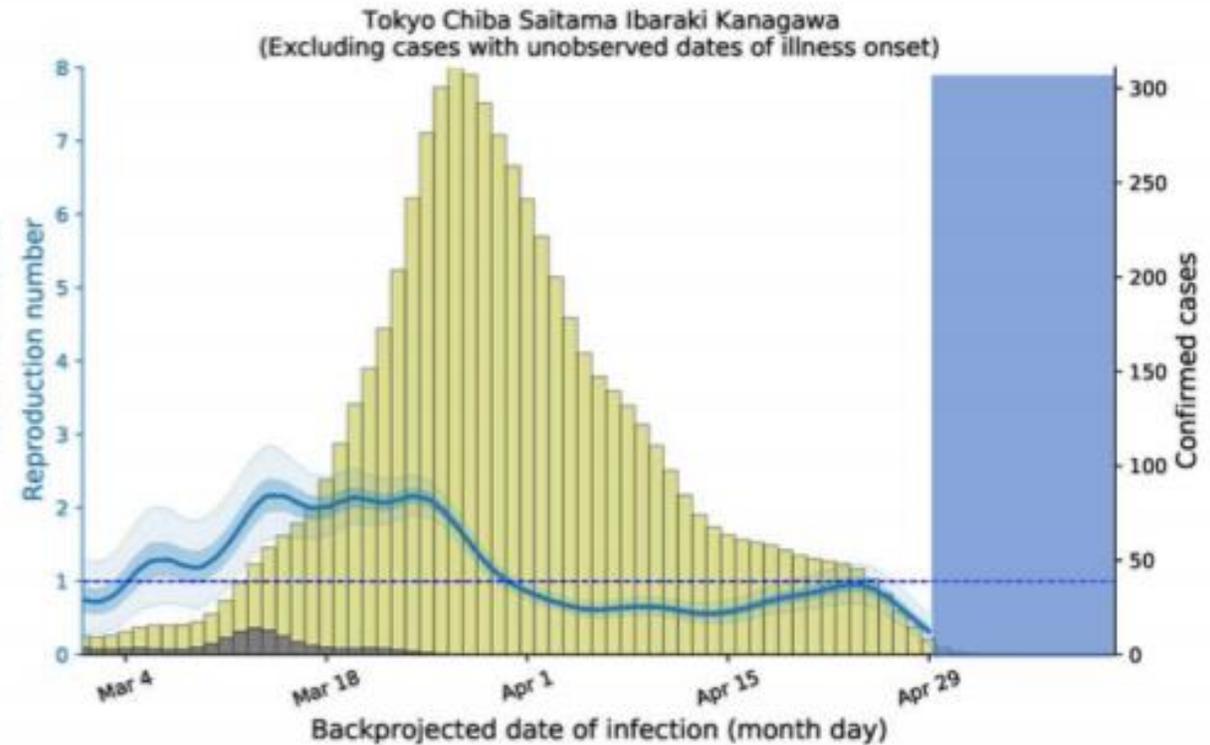
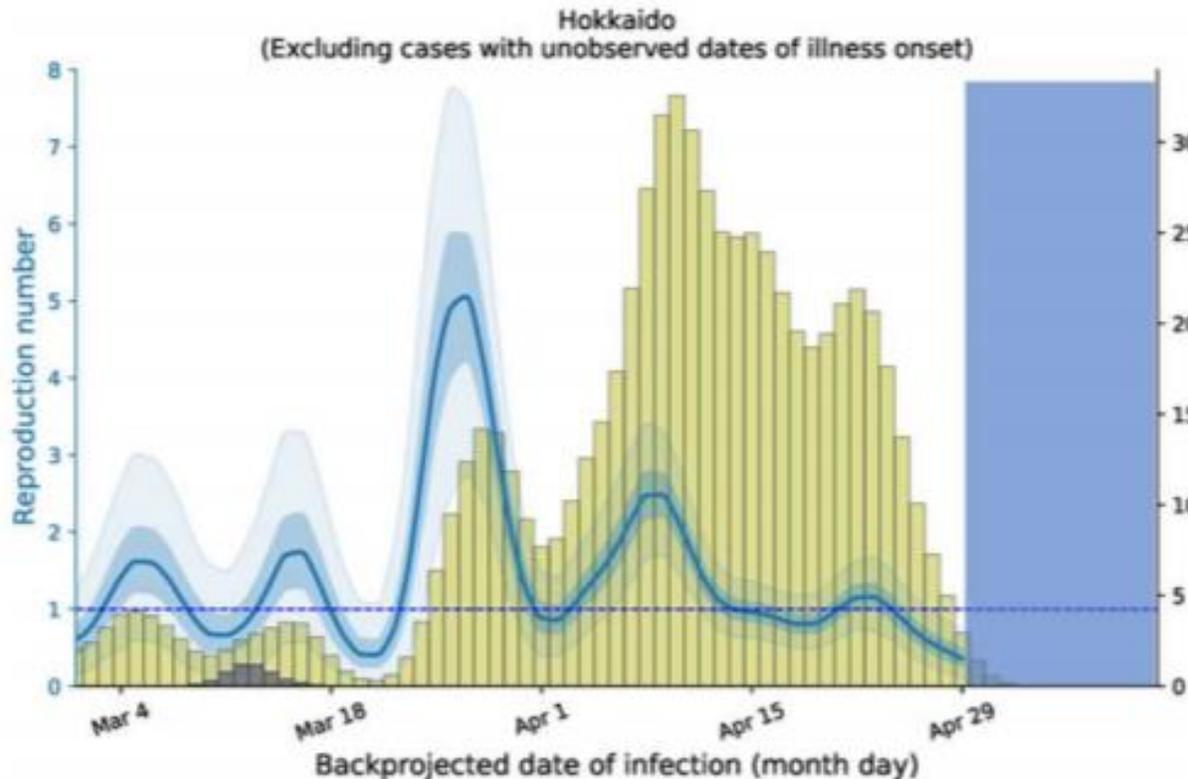
実効再生産数 R_e の推定：

北海道と(東京・埼玉・千葉・神奈川・茨木)

北海道

関東1都4県

東京・埼玉・千葉・神奈川・茨木



2つの方法

方法1: β :感染(確)率と γ :回復(確)率を推定し、それから実効再生産数 \bar{R}_0 を計算する。

方法2: 実効再生産数を直接推定する。

2-1: 簡便法

2-2: 厳密な方法

実効再生産数 R_e の推定方法

Cori, A., Ferguson, N. M., Fraser, C., and Cauchemez, S. (2013). A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics. *American Journal of Epidemiology*, 178(9), 1505–1512. <https://doi.org/10.1093/aje/kwt133>

「感染曲線から時間依存の再生産数を推定するための新しい考え方とソフトウェア」

ExcelとRのソフトがダウンロードできる(添付資料にいれておきました)。

実効再生産数 \bar{R}_0 の推定

方法1: 感染(確)率 β と回復(確)率 γ の同時推定

式(1) $S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$

式(2) $I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$

式(3) $R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$

のそれぞれに誤差項 ε_t を付け加え、最小自乗法を用いて、 β と γ を推定する。Excelのソルバーを用いて、推定値のみなら、かんたん。

式(1) $S_t = S_{t-1} - \boxed{\beta} S_{t-1} I_{t-1} + \varepsilon_t^S$ $\varepsilon_t^S \square N(0, \sigma_s^2)$

式(2) $I_t = I_{t-1} + \boxed{\beta} S_{t-1} I_{t-1} - \boxed{\gamma} I_{t-1} + \varepsilon_t^I$ $\varepsilon_t^I \square N(0, \sigma_I^2)$

式(3) $R_t = R_{t-1} + \boxed{\gamma} I_{t-1} + \varepsilon_t^R$ $\varepsilon_t^R \square N(0, \sigma_R^2)$

注1) 最少二乗法を適用するときは、誤差項は、必ずしも正規分布する必要はない。

注2) 単純に、それぞれの方程式に、最少二乗法を適用しては、ならない！なぜなら。

2-1) 3本の方程式があるので、誤差交換の相関があることを考慮しないといけない。SUR(Seemingly Uncorrelated Regression)を適用する必要があるかもしれない。

2-2) 式1と式2の β 、式2と式3の γ は同じ値でないといけない。制約付きの最小自乗法を適用すべき。

推定した β と γ の値を、以下に代入する。

$$\bar{R}_0 \equiv S_0 \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}}$$

実効再生産数 \bar{R}_0 の推定 方法2-1: 簡便法

Diekmann and Heesterbeek (2000)

$$\bar{R}_0 = \frac{\ln(s_t) - \ln(s_0)}{s_t - s_0}$$

ここで、 s_t , s_0 はそれぞれ、全人口 N に占める時点 t (最終時点)と時点 0 (開始時点)の感染可能人口の比率。 \bar{R}_0 の標準偏差の簡単な計算式もある。

$$s_t = \frac{S_t}{N}, \quad s_0 = \frac{S_0}{N}$$

東洋経済オンラインでの計算

[野村明宏「東洋経済が新型インフルエンザ「実効再生産数」を公開](#)

= [(直近7日間の新規陽性者数 / その前7日間の新規陽性者数)]^(平均世代時間 / 報告間隔)。

平均世代時間(人から人への平均感染日数)を5日、報告間隔は7日と仮定。報告日ベースによる簡易計算式。

詳しくは、西浦博 (2020)「実効再生産数とその周辺」、パワーポイント資料



実効再生産数 \bar{R}_t の推定

方法2-2: より正確な方法

ざっくりとした計算方法もありますが、より正確な推定方法とソフトは以下にあります。

Cori, A., Ferguson, N. M., Fraser, C., and Cauchemez, S. (2013). A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics. *American Journal of Epidemiology*, 178(9), 1505–1512. <https://doi.org/10.1093/aje/kwt133>

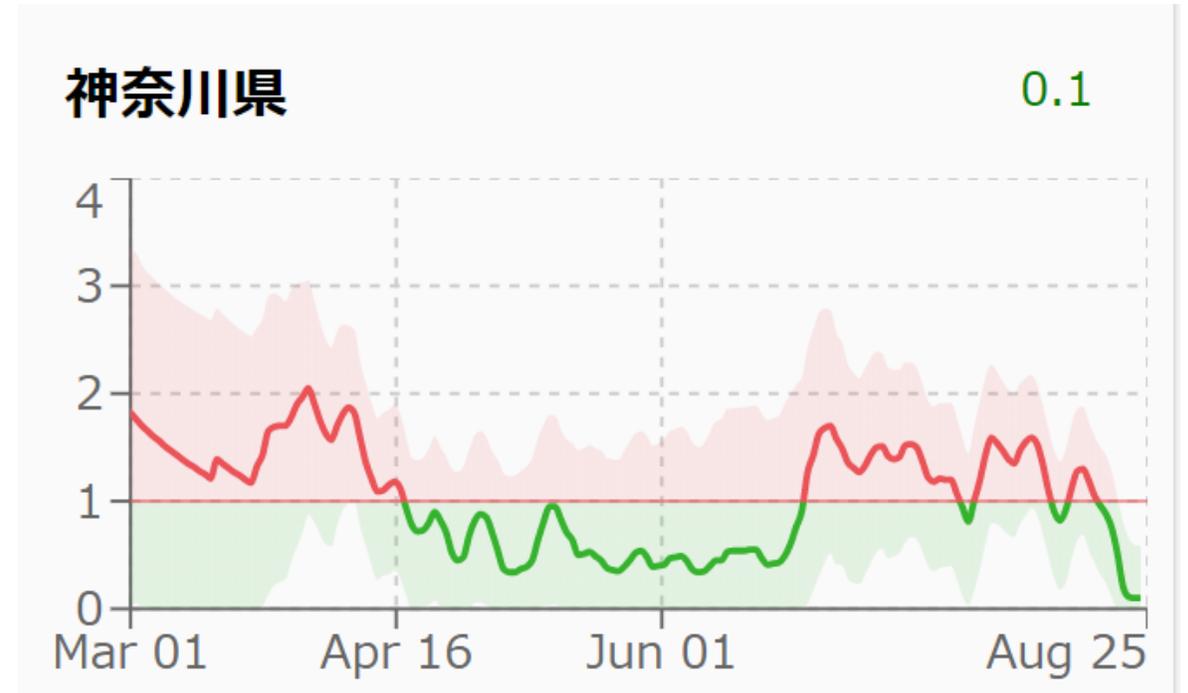
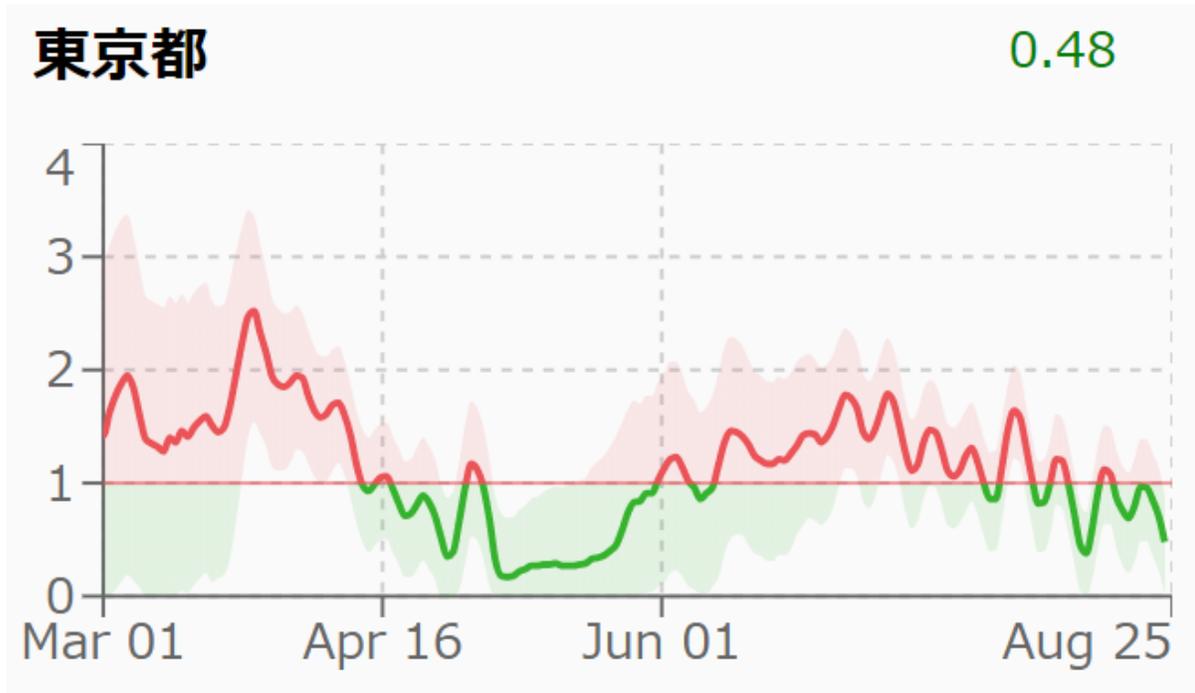
「感染曲線から時間依存の再生産数を推定するための新しい考え方とソフトウェア」
ExcelとRのソフトがダウンロードできる(添付資料にいれておきました)。

あの山中伸弥先生の「[山中伸弥による新型コロナウイルス情報発信](#)」の
「実効再生産数(R_t)の計算を試みました」に具体的な計算例(大阪の事例がのっています。)

1. [Coriらの論文](#)から R_t を計算するためのエクセルシートをダウンロード
2. [Biらの論文](#)からSerial intervalの平均を6.3日、標準偏差を4.2日と仮定
3. [大阪府](#)、[北海道](#)、および[京都市](#)のホームページから感染者数の推移をダウンロード
4. エクセルに感染者数を入力し、 R_t を計算。

東洋経済オンラインのCOVID-19サイトから
全国のデータをダウンロードできます。

「 R_t Covid-19 Japan」でのリアルタイム推定



計算のもとに成っているモデルは、以下で説明されている。

Bettencourt, L. M., & Ribeiro, R. M. (2008). Real time bayesian estimation of the epidemic potential of emerging infectious diseases. *PLoS One*, 3(5).

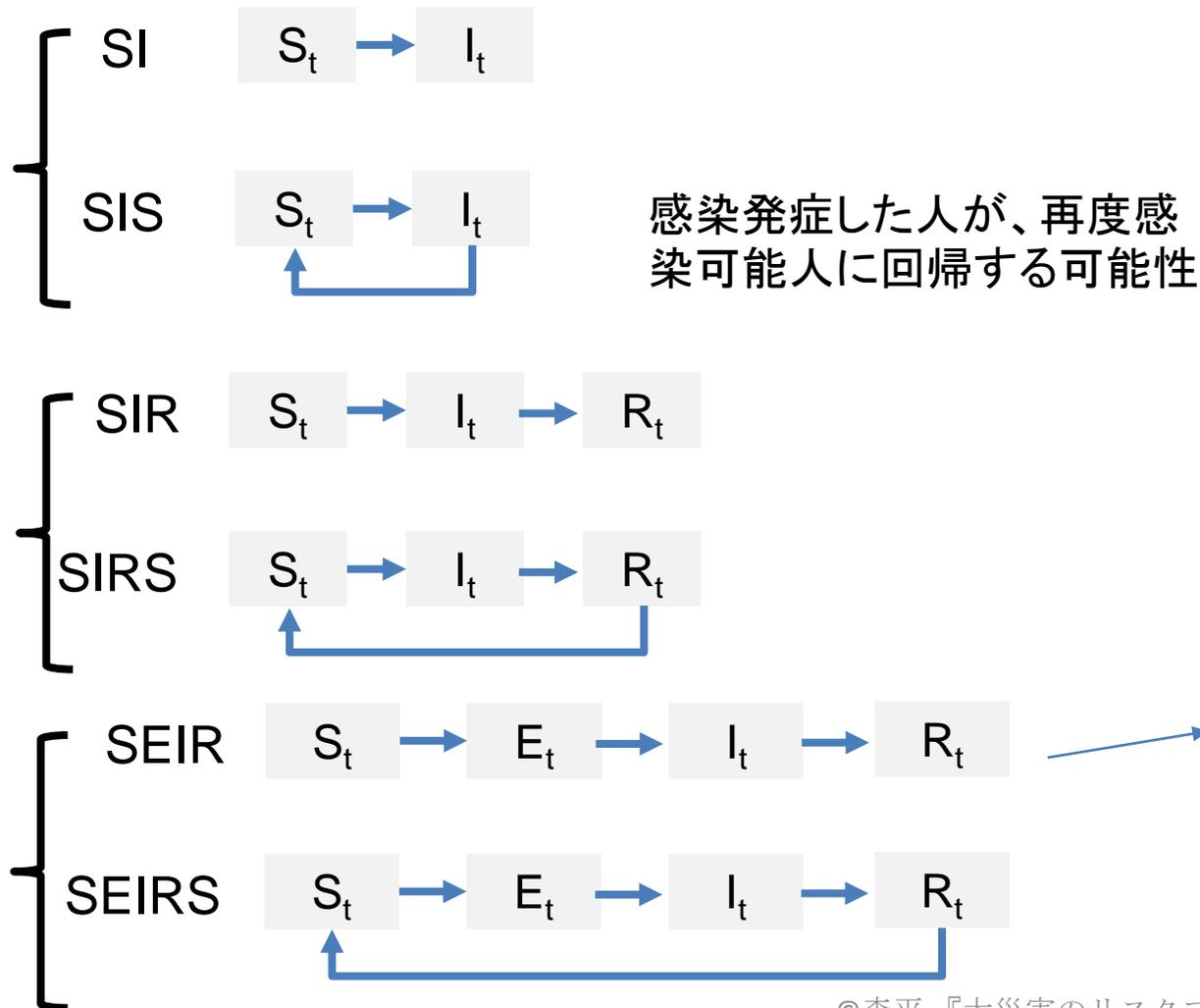
SIRモデルの拡張

- 1) 「証拠(エビデンス)があり、
 - 2) 正しい可能性が高い情報」
- を取り込んだモデルが必要

病態（山中伸弥HPから）

1. 国・地域により致死率が異なる
2. 感染後、症状が出るまでの潜伏期間は1から17日とばらつきがある（平均は5~6日程度）
3. 感染しても30~50%では症状が出ない（無症候の割合はもっと高い可能性もある）
4. 感染してもPCR検査で陰性となる場合がある
5. 発症しても多くの場合は発熱や咳などの軽症
6. 味覚・嗅覚異常が主症状のことがある。
7. 高齢者や持病を持つ患者を中心に一部の患者では肺炎等で重症化、致死率も高い

その他の良く知られた感染症モデル



ここで E_t は感染したけれども発症していない人数。パラメータ f は発症していない人が発症する割合(確率)。従って、 $1/f$ は平均潜伏日数

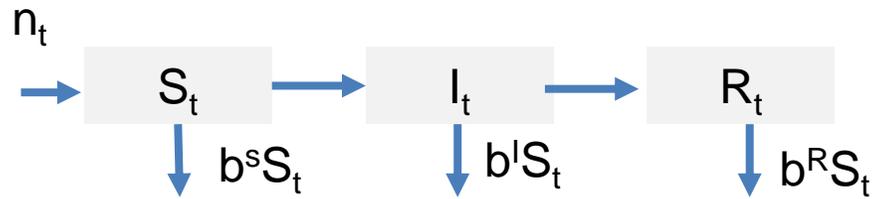
式(1) $S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$

式(2) $E_t = E_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - f E_{t-1}$

式(3) $I_t = I_{t-1} + f E_{t-1} - \gamma I_{t-1}$

式(4) $R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$

参入 n_t と死亡 b^* を考慮した(SIR)モデル

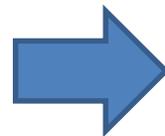


- 1) n_t はt日目に新規に参入する人口(例えば、海外からの入国)
- 2) b^* は死亡率

$$\text{式(1)} \quad S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

$$\text{式(2)} \quad I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$\text{式(3)} \quad R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$$

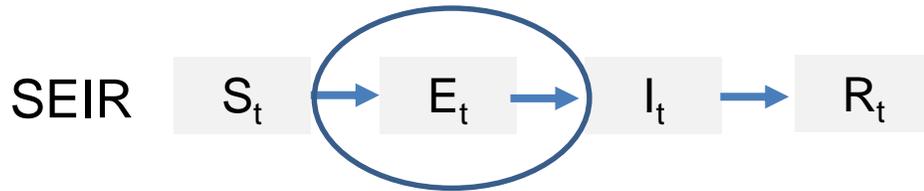


$$S_t = S_{t-1} + n_t - \beta S_{t-1} I_{t-1} - b^S S_{t-1}$$

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1} - b^I I_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1} - b^R R_{t-1}$$

SEIRモデルとは？



$$\text{式(1)} \quad S_t = S_{t-1} - \beta S_{t-1} I_{t-1}$$

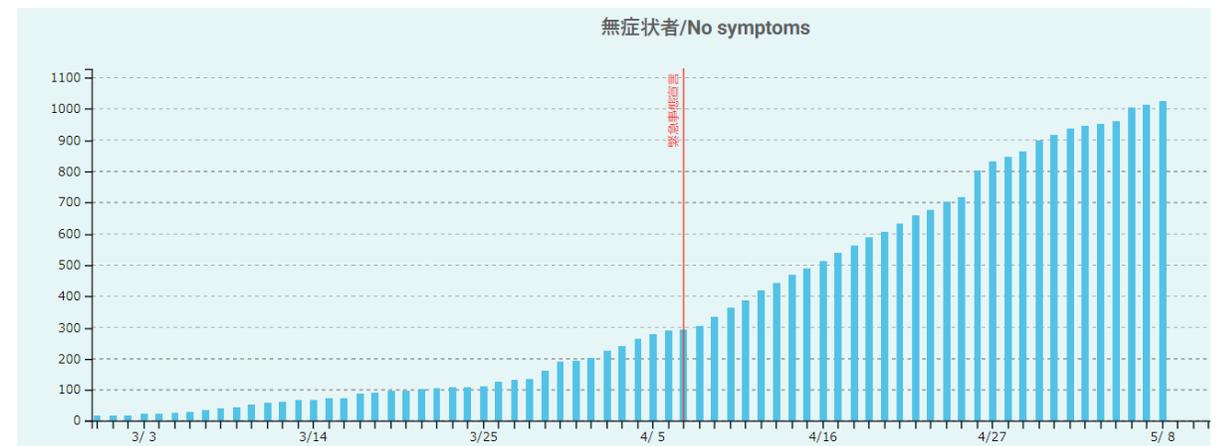
$$\text{式(2)} \quad E_t = E_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - f E_{t-1}$$

$$\text{式(3)} \quad I_t = I_{t-1} + f E_{t-1} - \gamma I_{t-1}$$

$$\text{式(4)} \quad R_t = R_{t-1} + \gamma I_{t-1}$$

SEIRモデルでも、再生産数の式に違いはないことに注意。

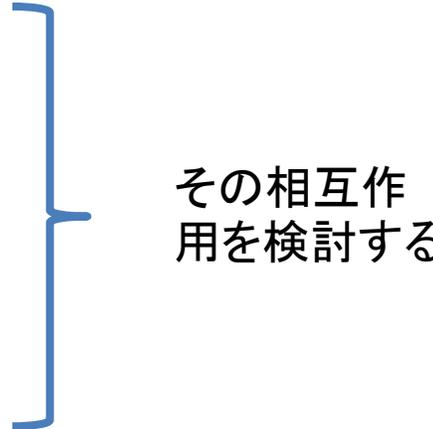
E_t = (感染したかもしれないが、発症しない人の人数)
 f = そのうちで感染した人の割合、あるいは確率



[COVID-19 in Japan](#)

[西浦モデル](#) (西浦博、北海道大学) : SEI-RRモデル

その他の拡張

1. 不確実性を導入（「**確率**」微分・差分方程式にする） ファイナンスの得意な分野
 1. S,I, Rの報告人数にノイズがある、ノイズの大きさが確率変動する。
 2. クラスターの発生（Jumpモデル）。
 2. 異なる人や地域を考慮する。
 1. 年齢/経済水準/保険など。
 2. 既往症のある無し、どのような既往症があるのか？
 3. 地域（国、県、都市）、などなど。
 3. 異なる感染パターンを考える。
 4. 偏微分方程式による定式化（2つ以上の変数の影響を同時に考慮する）。
- 
- その相互作用
を検討する

マーケティング。新製品の普及
人口移動(移民)
コンピュータウイルスの感染
ネットでの「炎上」、流言飛語
倒産の連鎖(金融規制)
失業の連鎖

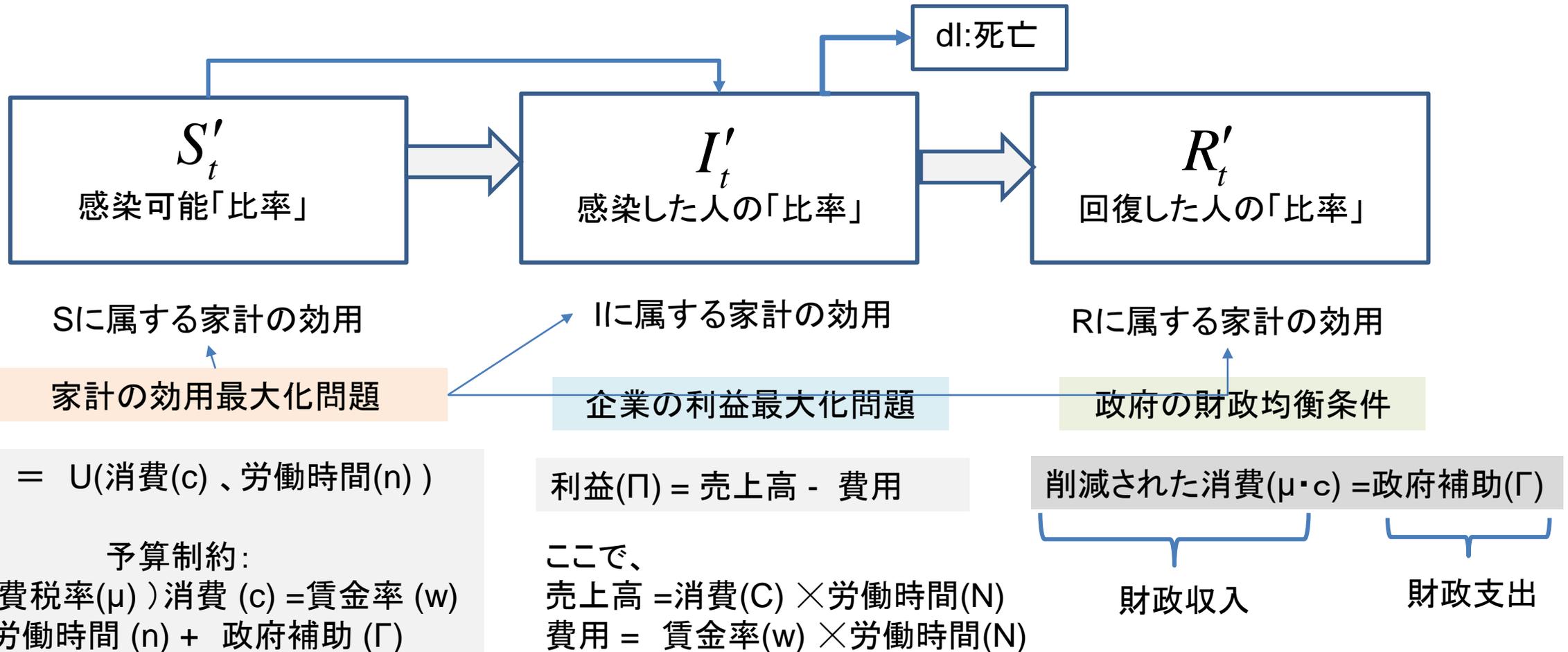
感染症(SIR)モデルの経済への応用例

Rodrigues, H. S. (2016). Application of SIR epidemiological model: new trends. *arXiv preprint arXiv:1611.02565*.

SIR-Dモデルを用いたCOVID-19の経済分析

Eichenbaum, Rebelo, and Trabandt (2020)の考え方

Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., and Trabandt, M. (2020). *The macroeconomics of epidemics* (No. w26882). National Bureau of Economic Research.



効用 = $U(\text{消費}(c), \text{労働時間}(n))$

予算制約:
 $(1 + \text{消費税率}(\mu)) \times \text{消費}(c) = \text{賃金率}(w) \times \text{労働時間}(n) + \text{政府補助}(\Gamma)$

μ はソーシャルディスタンスを示す消費税と解釈

利益(Π) = 売上高 - 費用

ここで、
 売上高 = 消費(C) \times 労働時間(N)
 費用 = 賃金率(w) \times 労働時間(N)

削減された消費($\mu \cdot c$) = 政府補助(Γ)

財政収入

財政支出

Eichenbaum, Rebelo, and Trabandt (2020): 続き

これまで説明したSIRモデルでは、t日目の感染者数は $I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1}$

Eichenbaum, Rebelo, and Trabandt (2020)モデルで、比率で表現した感染者率は

$$I'_t = I'_{t-1} + \beta S'_{t-1} I'_{t-1} + T_{t-1} - (\gamma + d) I'_{t-1}$$

死亡率

ここで

$$T_{t-1} = \pi_{S'1} (S'_{t-1} C_{t-1})(I'_{t-1} C_{t-1}) + \pi_{S'2} (S'_{t-1} N_{t-1})(I'_{t-1} N_{t-1})$$

経済活動(消費と労働)
に従事することによる
新規感染者の増加

消費Cを行うために外出する
⇒ その結果感染者Iが増える

働きNに出るために外出する
⇒ その結果感染者Iが増える

消費と労働を減らせば(外出制限やソーシャルディスタンス)が感染者は減る。しかし、家計の効用(満足)が減少する。その「折り合い」をどうきめるか？

実際の家計、企業、政府
モデルは以下のSIR-Dモ
デルを取り込んでより複雑

数式(飛ばしても良い)

家計の効用最大化問題

問題設定

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, n_t\}} \rightarrow U_0^j &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\ln c_t - \frac{\theta}{2} n_t^2 \right) \\ \text{s.t.} \quad (1 + \mu_{ct})c_t &= w_t n_t + \Gamma_t \end{aligned}$$

企業の利益最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{N_t} \rightarrow \Pi_t &= C_t - w_t N_t \\ &= AN_t - w_t N_t \\ &= (A - w_t) N_t \end{aligned}$$

政府の財政均衡条件

$$\mu_{ct} c_t = \Gamma_t$$

SIR-Dモデル

$$S'_t = S'_{t-1} - \beta S'_{t-1} I'_{t-1}$$

$$I'_t = I'_{t-1} + \beta S'_{t-1} I'_{t-1} + T_{t-1} - (\gamma + d) I'_{t-1}$$

$$R'_t = R'_{t-1} + \pi_r I'_{t-1}$$

$$T_{t-1} = \pi_{S'1} (S'_{t-1} C_{t-1})(I'_{t-1} C_{t-1}) + \pi_{S'2} (S'_{t-1} N_{t-1})(I'_{t-1} N_{t-1})$$

$$D_t = D_{t-1} + d I'_{t-1}$$

$$M'_t = M'_{t-1} - d I'_{t-1}$$

初期条件 $M'_0 = 1, I'_0 = \varepsilon, S_0 = 1 - I'_0$

Eichenbaum, Rebelo, and Trabandt (2020): 続き

Eichenbaum, Rebelo, and Trabandt (2020)は、このような問題設定のもとで、

様々な社会政策(ソーシャルディスタンス、ロックダウンの早期解除、健康インフラの整備)、財政政策(補助金)、感染度合い β (ワクチン接種)や回復率(γ)を変化させて、人々の効用(満足)を最大にするような、政策シミュレーションを試みている。

[このMATLAB言語によるプログラム](#)は公開されている。

同様なモデルは既に以下で査読論文として公開されている。

Perrings, C., Castillo-Chavez, C., Chowell, G., Daszak, P., Fenichel, E. P., Finnoff, D., ... & Levin, S. (2014). Merging economics and epidemiology to improve the prediction and management of infectious disease. *EcoHealth*, 11(4), 464-475.

また、パンデミックリスクと経済の相互作用を取り扱った論文としては、経済成長論、経済発展論の分野でも多数のものが既に発表されている。

金融への応用

リーマンショック以降、感染症モデルを金融に応用した多くの研究がある。たとえば、Fisher, E. (2013). A biological approach for financial network contagion based on the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) model. *Análisis Económico*, 28(69), 109-128. その他については参考文献リストを参照

次のようなアナロジーを考えてみよう

パンデミックリスク

ウイルス: COVID-19

感染可能人数: S

未発症人数: E

感染人数: I

死亡: dI

回復人数: R

金融危機

サブプライムローン
(証券化商品)

全ての金融機関・投資家: S

投資適格会社: E

投資不適格会社: I

デフォルト会社数: dI

回復会社数: R

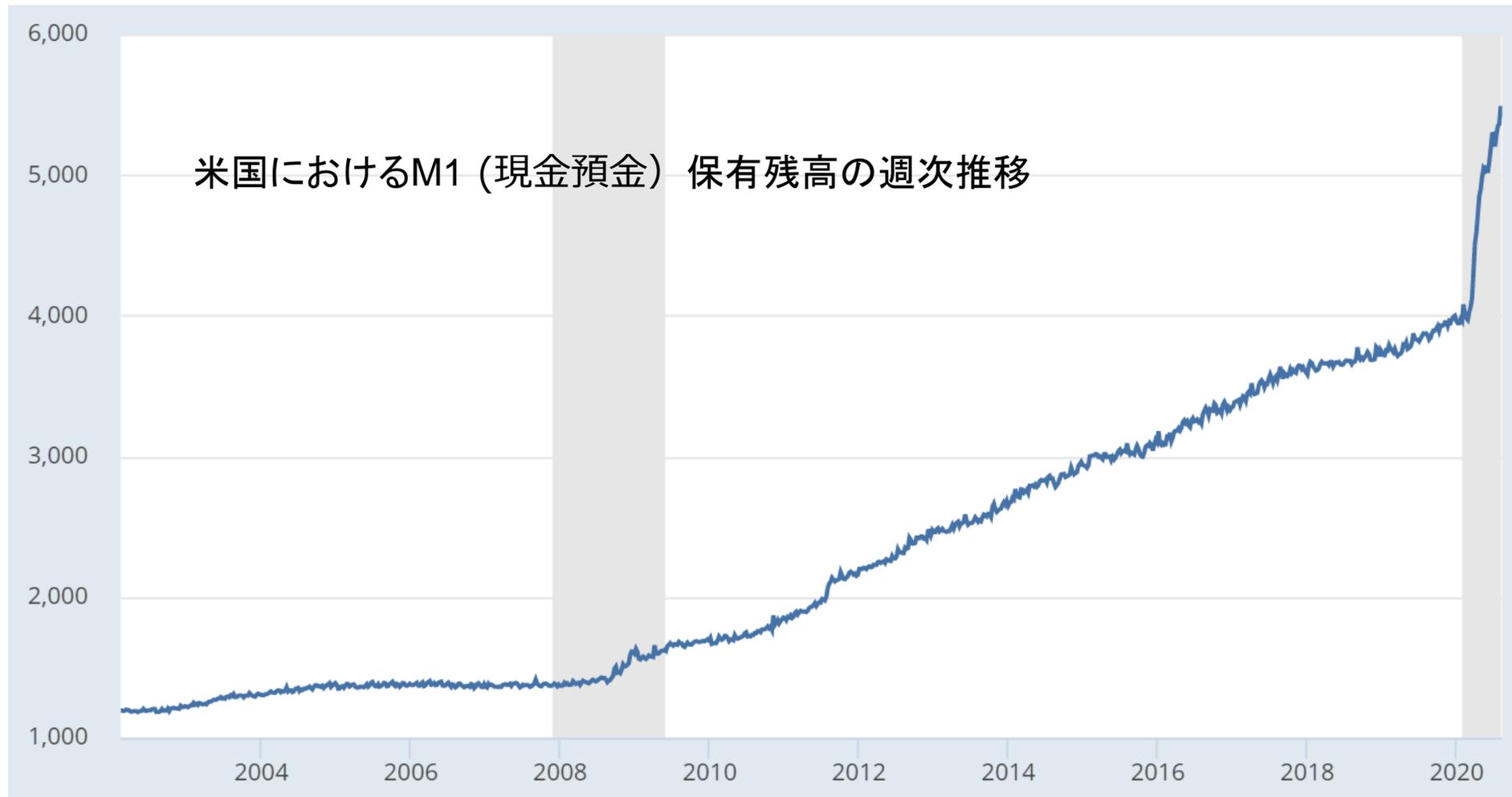
規制、例えば、以下の役割はなにか

BIS 規制における「資本充実要求」
保険会社における「危険準備金」、「異常危険準備金」
銀行における「貸し倒れ引当金」

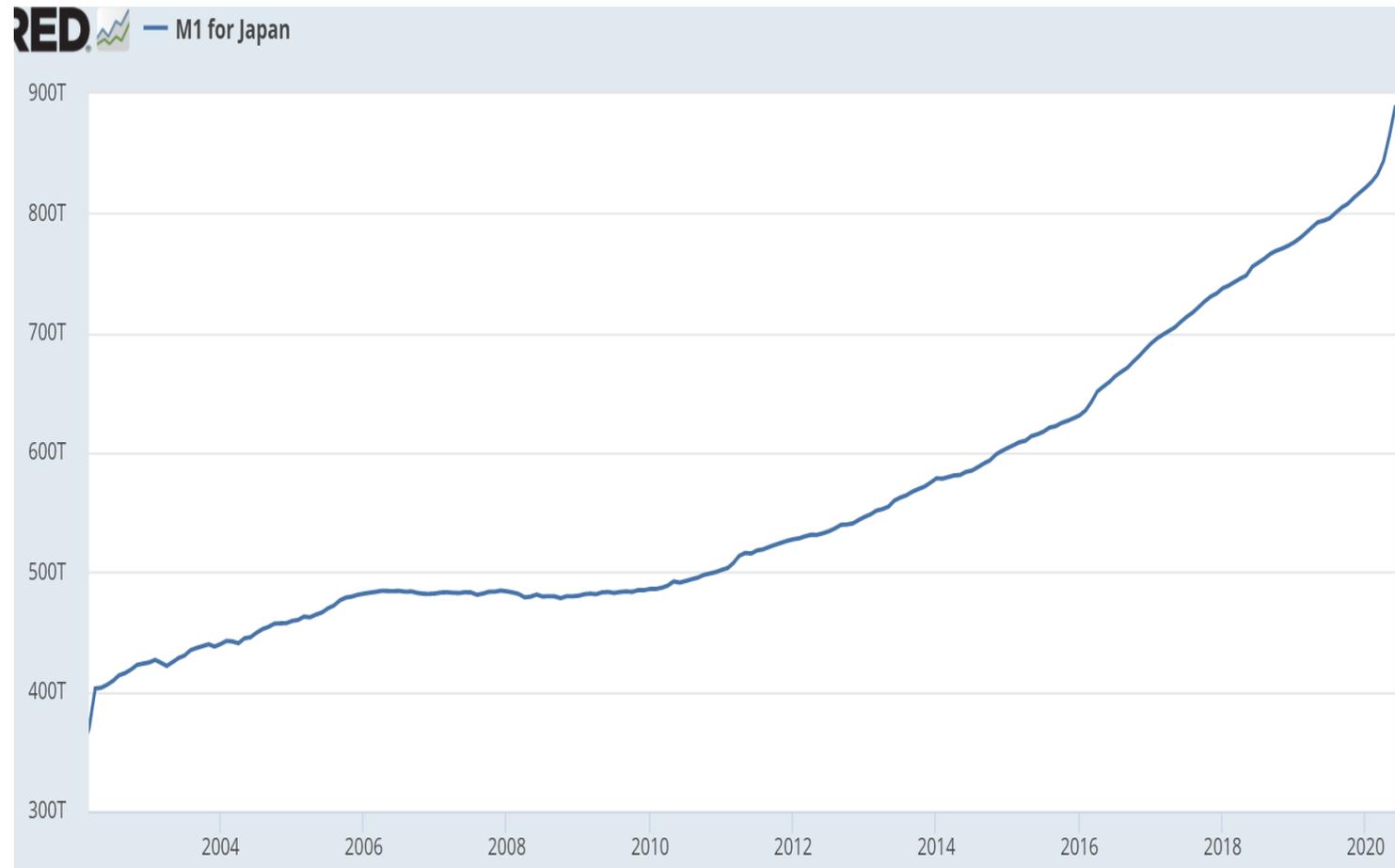
新型コロナは金融市場に何をもたらしたのか？

1. 現金相当資産への需要（消費の減少、投資の急激な減少、新規の資金調達）
2. 金の保有（森平爽一郎「人はなぜ金に魅せられるのか？」、FP研究 No.5）
3. 消費の減少と貯蓄の増加（不確実性の経済学から明らか、Sandmo (1969, 1970, 1974), Leland (1972)）
4. 保険の解約オプションの行使（経営者保険、外貨建生保）
5. 株式への投資の増加！ 株価の急激な回復
6. こうしたことは今までの大災害では見られないこと。

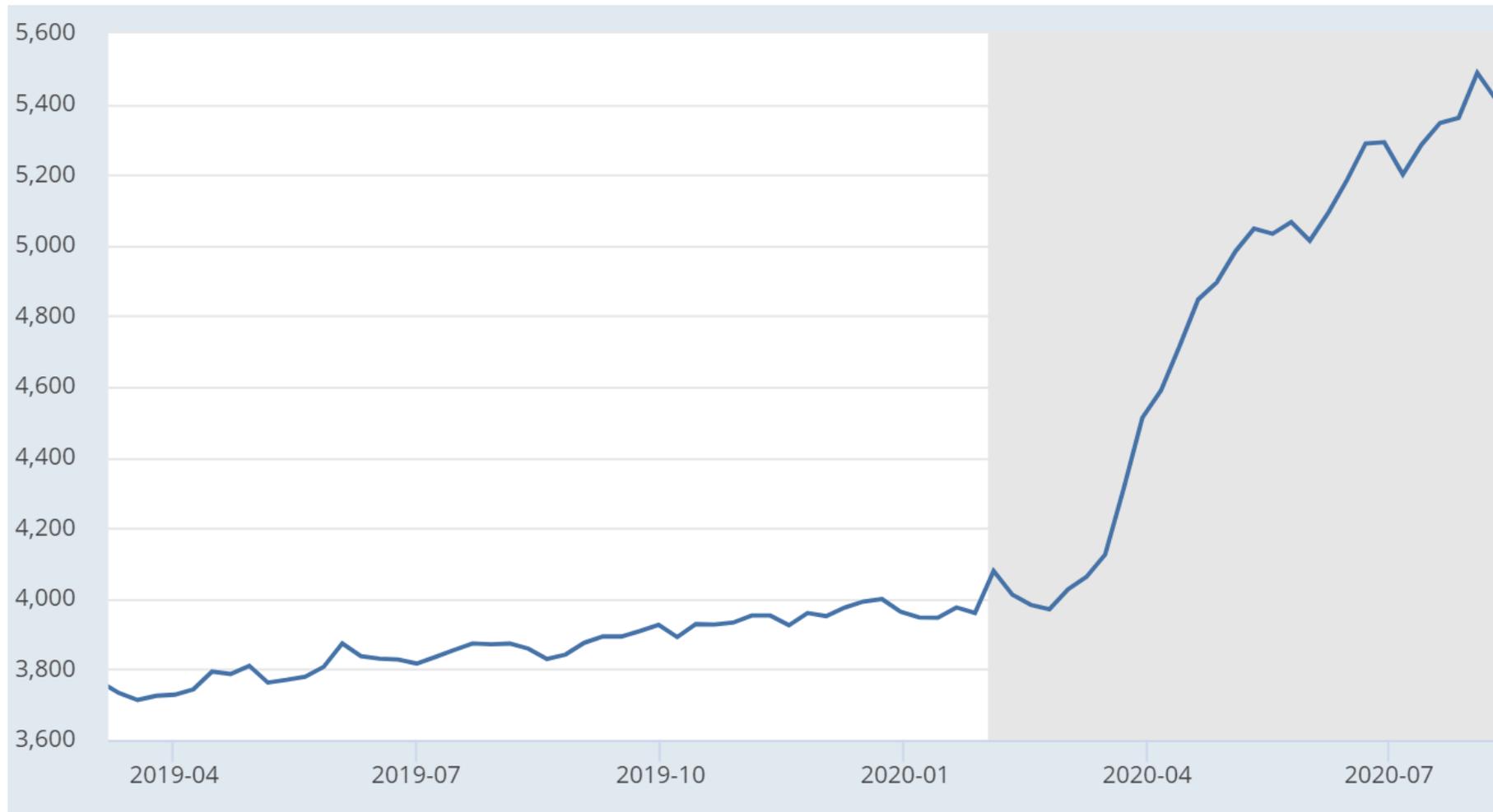
「Cash is King, Cash Flow is Queen」



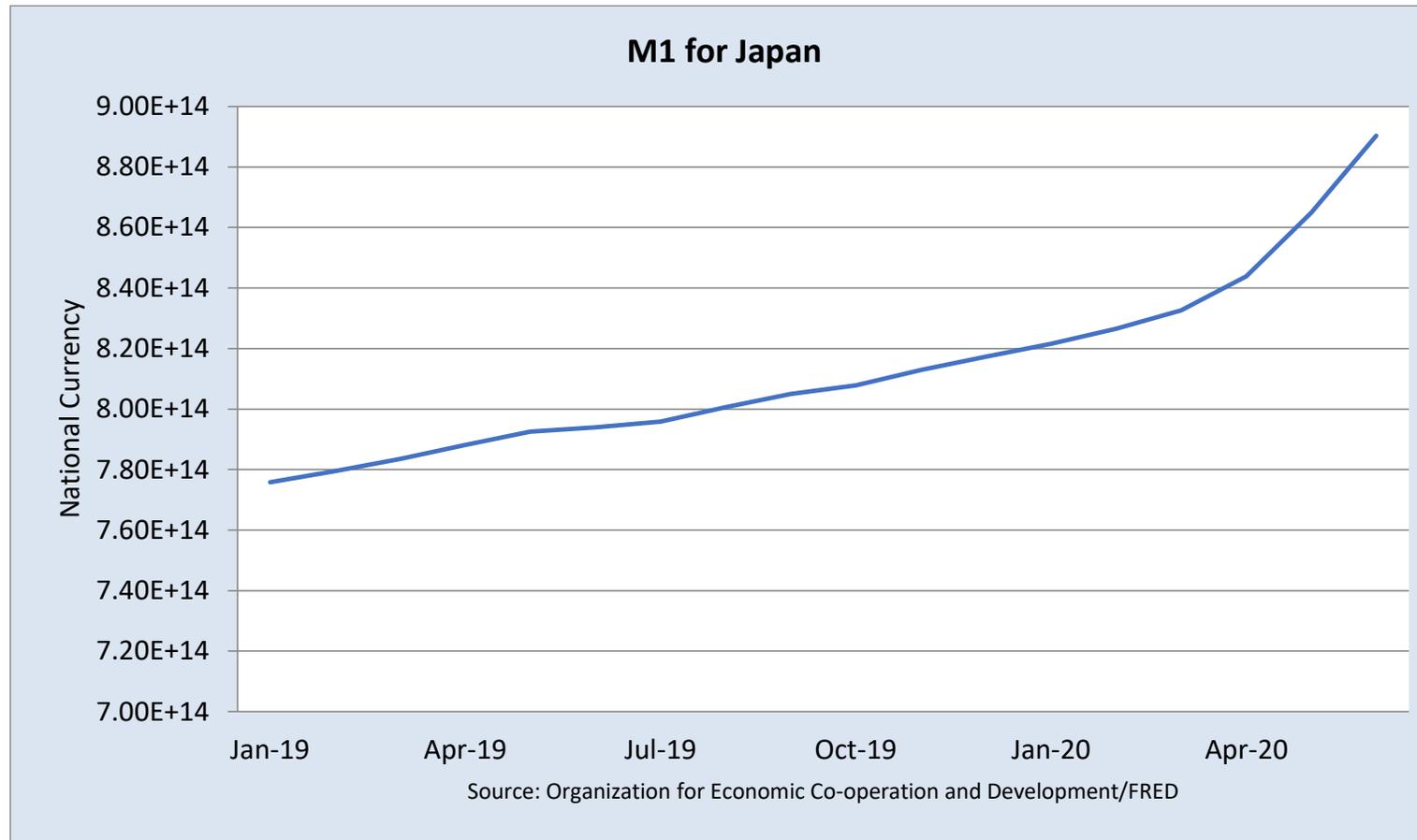
日本：M1（現預金）の推移



米国：直近1年間のM1推移



日本のM1の推移：月次データ



Mindヘルス指数の推移

Mins Health 指数は
(株)RimTechによる

良い
↑
↓
悪い

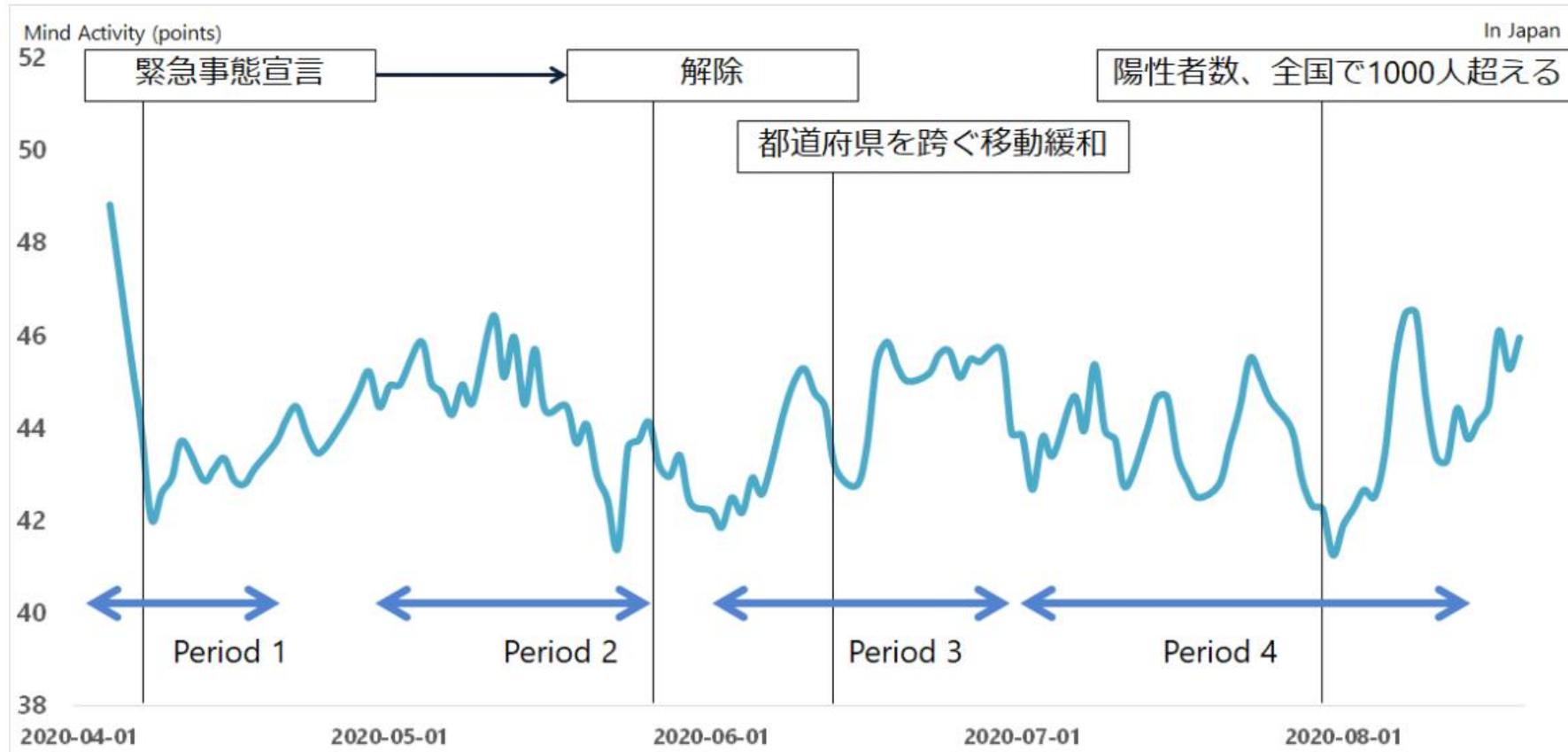


Chart 1 Mind Activity

新型コロナの感染の拡大(縮小)と人々のリスクに対する感覚とが逆の方向に動いている。

1. 感染症の拡大 ⇒
2. 人々のリスク回避度の上昇 ⇒
3. 外出の減少 ⇒
4. 接触率が減少 ⇒
5. 感染者数の減少

フィードバック制御の典型例

結論

1. 今回の新型コロナウイルスインフルエンザの流行では「接触率8割の削減」が問題になった。その裏付けは
2. 再生産数 R_0 、 R_t を良く理解することである。
3. これほど人々の生活に影響をあたえ、議論の的に成った数字はなかったが、
4. [EBPM \(Evidence-Based Policy Making\)](#)、つまり、証拠に基づく政策立案と実行が行われたことは、
5. その意義や問題点を議論することになり、
6. 結果としてはよかったのではないか？

参考文献

日本語文献のみを示す

1. 稲葉 寿 (2002) 『数理人口学』 東京大学出版会.
2. 稲葉 寿 (編著) (2008) 『感染症の数理モデル』 培風館. 絶版
3. 巖佐 庸 (1998) 『数理生物学入門』 共立出版.
4. 南 就将. (2015). 感染症流行の数理モデル: 大学初年次で学ぶ数学の応用例. *慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学*, (58), 33-51. (医学部、理工学部 学部1年生! のための講義ノート)
5. 南 就将, 水野 洸太, 南 隆二. (2013). 異なる接触頻度を持つ個体からなる人口集団における感染症流行のモデル化について. *慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学*, (53), 23-44. (医学部4年生のための講義ノート)
6. 西浦博, 稲葉寿. (2006). 感染症流行の予測: 感染症数理モデルにおける定量的課題. *統計数理*, 54(2), 461-480
7. 廣瀬英雄, 松隈和広, 作村建紀. (2011). 感染症拡大予測モデルとその考察. *情報処理学会論文誌数理モデル化と応用*, 4(3), 102-109.
8. 稲葉寿. (2008). 微分方程式と感染症数理疫学 (特集 現代数学はいかに使われているか (解析編)). *数理科学*, 46(4), 19-25.
9. 瀬野 裕美. (2011). 離散型 Kermack-McKendrick SIR モデルの特性 (生物現象に対するモデリングの数理).