

特集 学会賞

多期間最適資産形成モデルとFPツールの開発

慶應義塾大学 理工学部

枇々木 規雄/Norio HIBIKI

キーワード (Key Words)

ファイナンシャル・プランニング (Financial Planning), 多期間最適化 (Multi-period Optimization), 確率的キャッシュ・フロー分析 (Stochastic Cashflow Analysis), FPツール (FP Tool)

〈要 約〉

枇々木ら (2005-2008) の研究成果を実際にファイナンシャル・プランナーに利用してもらう場合, 計算速度の高速化と柔軟な世帯の設定ができるソフトウェアへの実装は不可欠である. 本研究では主にこの2点に焦点を当て, 高速化するために問題規模を縮小した集約モデルを提案するとともに, それを実装した分析ツールを開発する. 現在まで開発した分析ツールはプロトタイプであるが, Excel上でのインターフェース, 数理計画法ソフトウェアとC++を利用した高速な計算を実現している. また, 確率的なキャッシュ・フロー分析が可能であり, 従来のFP分析ツールの問題点を解決することができている. また, 集約モデルを利用することによってオリジナルモデルに比べて計算速度を向上させることができ, ファイナンシャル・アドバイスをする上では有用であることを示す.

目次

1. はじめに
2. モデルの設定
 - 2.1 問題の構造
 - 2.2 世帯
 - 2.3 収入
 - 2.4 消費支出
 - 2.5 投資資産
 - 2.6 生命保険
3. 多期間最適化モデル
 - 3.1 オリジナルモデル
 - 3.2 集約モデル
 - 3.3 資産配分 (投資戦略) を所与とするモデルの定式化
4. FP 分析ツールとモデルの実装
 - 4.1 FP分析ツール
 - 4.2 パラメータの設定
 - 4.3 モデルの実装
5. 数値分析
 - 5.1 設定条件
 - 5.2 数値分析の概要
 - 5.3 分析結果
6. おわりに

1. はじめに

世帯の家計は, 世帯主の死亡に伴う収入減少リスクやインフレに伴う実質資産価値の減少リスクなど様々なリスクにさらされている. 世帯の家族構成, 収入・支出, 資産・負債や住宅購入, 子供の教育, 退職後の生計などの将来に対する希望や目標を参考にして, 長期間にわたる投資や保険などの戦略を立案することをファイナンシャル・プランニング (Financial Planning : 以降, FP) と呼び, ファイナンシャル・プランナーはその実行を手助けする役割を果たしている. 図1はFPをモデル化するために重要なイベントやそれに関連する収入・支出を時間軸上に表している. 本研究では世帯主の退職までの資産形成を目的としてモデルを構築する.

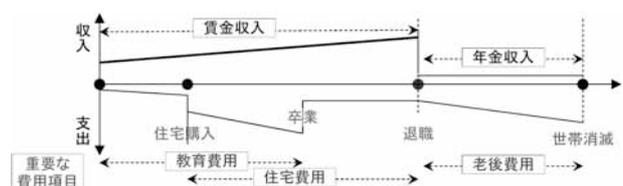


図1 : FPのモデル化

個人の最適な投資戦略については学術的にも古くから研究が進められており、近年ではCampbell (2006) も家計のファイナンスの重要性を述べている。キャンベル、ビセイラ (2005) の第6章、第7章では連続時間のもとで個人の最適な消費と投資の決定方法について解説している。Chen, et al. (2006) は、資産配分に加えて、賃金収入、消費支出、生命保険を含む1期間最適化モデルを提唱している。Huang, Milevsky and Wang (2008) はCRRAのもとで生命保険と賃金収入を含むポートフォリオ選択問題を解いている。HJB方程式を単純化し、効率的に数値解を求めている。Consiglio, Cocco and Zenios (2007) はシナリオベースの個人投資家のためのALMモデルを提案している。多期間にわたり、目標に対するダウンサイドリスクを抑えつつアップサイドポテンシャルを最大化するモデルとして定式化し、各時点で一定のポートフォリオの配分比率を求めている。Höcht et al. (2008) は負債も考慮し、株式、債券、不動産、現金を対象として個人投資家の資産配分決定を行うALMモデルとしてConsiglio, Cocco and Zenios (2007) の個人投資家向けALMモデル、提案している多期間CVaRモデル、不達成確率モデルの3種類のモデルを示し、数値分析を行っている。

一方、枇々木、小守林、豊田 (2005)、枇々木、小守林 (2006)、Hibiki (2007)、枇々木 (2008) はモンテカルロ・シミュレーションによって不確実性を記述した数理計画問題として定式化を行うシミュレーション型多期間最適化手法 (枇々木, 2001) を用いて資産形成モデルを提案している。特に枇々木 (2008) は、枇々木ら (2005-2007) の研究成果をもとにファイナンシャル・プランナーが利用可能なより現実的なモデルとして、社会保険・税金、生命保険ポートフォリオを考慮して最適な投資・保険戦略を求めるモデル、所与の資産配分戦略 (「100-年齢」戦略、コンスタント・リバランス戦略) のもとでの最適保険戦略を求めるモデルを構築し、数値分析を行っている。これらの研究成果を実際にファイナンシャル・プランナーに利用してもらう場合、計算時間の高速化と柔軟な世帯の設定ができるモデルの実装と分析ツール (ソフトウェア) の開発は不可欠である。本研究では主にこの2点に焦点を当てて、高速化するための集約モデルの提案およびモデルを実装した分析ツールとその利用について議論する。

(1) 計算時間の高速化

計画期間が長い場合、最適化問題の規模が大きくなり、多くの計算時間を要する。たとえば、35歳の世帯主が60歳で定年退職する場合、1年ごと

にリバランスを行うと計画期間数は25期間となる。シミュレーションパスの本数が5,000本ならば、制約式は約12.5万本、決定変数も約12.5万個であり、問題を解くのに約11分の計算時間が必要である¹。事前に顧客の属性やライフプランを入力し、様々な数値計算を行い、何日かあとにその結果を顧客に渡すのであれば、仮に1ケースに約11分を要しても問題ないだろう。ただし、その結果を見て、顧客から再度別のケースについてリクエストされた場合には、この作業を何度も繰り返す必要があり、迅速にアドバイスをできるとは限らない。また、たとえ事前に計算を行うにしても、様々なケースに対する解答を用意するには多くの計算時間が必要である。この問題点を解決するためには、計算精度は多少犠牲にしても (精度の許容範囲内で)、計算速度を向上させることは不可欠であり、問題の規模を縮小させる必要がある。また、シミュレーションパスの本数を増やす場合、問題の規模を保つためには期間数を減らさざるを得ない。

多期間最適化モデルを単純化して問題を解く研究には、Klaassen (1998)、Gaivoronski and de Lange (2000) がある。Klaassen (1998) は問題の規模を縮小するために、リスク中立確率を用いてもとのデータの特性を保持したままで、状態と期間を集約してモデル化する方法を示している²。Gaivoronski and de Lange (2000) は意思決定の柔軟さと不確実性の記述の正確さの間にあるトレードオフを検証している。動的固定ミックス決定ルールのもとで求められたポートフォリオは、パスの本数を少なくして求められたポートフォリオよりもよいパフォーマンスが得られ、不確実性の記述の正確さは意思決定の柔軟さよりも重要であることを示している。いずれの研究もシナリオ・ツリー型モデルに対する方法である。それに対し本研究では、枇々木 (2008) のシミュレーション型多期間最適化モデルを修正したモデルの問題規模を縮小させたモデルを2種類提案する。このモデルを集約モデルと呼ぶことにする。仮想世帯に対する数値分析を用いて最適解の計算精度とその有用性を検証する。

(2) 柔軟な世帯の設定ができるモデルの実装・分析ツールの開発

本研究では、より現実の世帯の設定に対応する

¹ IBM ThinkPad T61 (Intel Core2 Duo, CPU T9300), クロック周波数2.5GHz, メモリ3GB RAMで数理計画ソフトウェアはNUOPTバージョン13.1.5を利用している。投資量モデルで解いたあと、投資比率近似モデルを3回反復している。

² state aggregationとtime aggregationと呼んでいる。

ために、枇々木（2008）のモデルに比べると、主に以下の点を改善・変更している。

- ① 配偶者は専業主婦だけでなく、共働き世帯の取り扱いも可能にしている。また、専業主婦の場合も世帯主が死亡した場合には働き始めたり、パートタイムで働くことによって収入を得ることが可能な設定にしている。
- ② 世帯の住居は、初期時点では賃貸で、計画期間中に住宅を購入することが可能な設定（購入しなくてもよい）に加えて、初期時点ですでに住宅を保有している設定も可能とする。
- ③ 3種類の生命保険（平準定期保険、逡減定期保険、収入保障保険）に1年間（満了時自動更新）の1年定期保険を追加する。
- ④ 初期時点での生命保険の新規契約に加えてすでに契約済みの生命保険の設定も可能とし、それらを初期時点で解約も可能としている（保険の見直しにも対応している）。
- ⑤ 契約済みの既存の個人年金を保有する設定も可能とする。
- ⑥ 火災事故、重大な疾病の発生を含めないが、通常加入していると考えられるので、火災保険料、医療保険料の支払いを支出に含める³。

本研究ではこれらを実装し、Excelをインターフェースとする分析ツールを開発する。本論文の構成は以下の通りである。2節では問題の構造や世帯の収支など基本的なモデルの設定について説明する。3節では枇々木（2008）のモデルに前述の改善・変更を行ったモデルを示す。さらに、問題の規模を縮小するために計画期間数を短縮する設定ルールと集約モデルの定式化の方法を示す。4節では既存のFP分析ツールについてサーベイし、FP分析ツールにおける最適化モデルの利用と日本国内のFP分析ツールの問題点を述べる。さらに3節のモデルに利用するパラメータの設定方法と実装したFP分析ツールについて説明する。5節では仮想世帯に対する数値分析を行う。集約モデルについても様々な規模（計画期間数）に対する問題を解き、トレードオフ関係にある計算時間と計算精度の関係について検証する。最後に6節でまとめを行う。

³ 火災発生による損失は家計にとって考慮することは不可欠であるが、著者の過去の研究より火災保険は付加保険料比率にかかわらず、ほぼフルヘッジすることが最適解となる。したがって、フルヘッジしておけば、たとえ火災が発生したとしても保険金で修復できるので、火災事故の発生の有無をモデルから取り除く。一方、医療保険は付加保険料を無視すると著者の過去の研究ではフルヘッジが最適解となる。付加保険料比率によって最適解は変わるが、医療保険金額は家計へのインパクトが比較的小さいため、疾病の発生の有無を取り除く。

2. モデルの設定

問題の構造、世帯の定義および想定する世帯の収入と消費支出を示す。さらに、投資資産価格や生命保険の保険料、保険金額の計算方法を説明する。シミュレーション型多期間最適化手法でのモデル化を明示的に示すために、パスに依存して決まるパラメータ（確率変数）には添字の i を付けて記述するが、数式の中で $(i = 1, \dots, I)$ は省略する（ I はパス数）。また、時点（期間）を表す添字 t が $(t = 1, \dots, T)$ の場合にも記述を省略する。

2.1 問題の構造

各時点で発生する可処分所得、退職金、遺族年金、生活支出などのキャッシュ・フローを所与とする。本研究では世帯主の定年退職時点において、公的年金（老齢基礎年金、老齢厚生年金）以外に必要な資金を貯めることを目的とする。したがって、計画最終時点である退職時点の最終富の条件付きバリュー・アット・リスク（CVaR）の下制限約のもとで、期待最終富を最大化するように、以下に示す最適資産配分および保険購入・解約を決めるモデルを構築する。

- 0時点で資産配分を行い、1時点以降も $T-1$ 時点まで毎時点リバランスを行う。
- 0時点で T 期間満期の生命保険（平準定期保険、逡減定期保険、収入保障保険）を購入する。
- 各時点（0～ $T-1$ 時点）で1年定期保険を購入する。
- 0時点で既存の生命保険の一部もしくは全部を解約する。

概要を図2に示す。

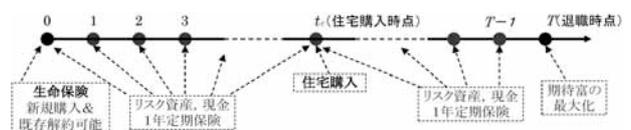


図2：問題の構造

2.2 世帯

世帯とは、1人の世帯主と複数の家族（配偶者、子供など）からなる集団と定義する。世帯主と配偶者はともに労働可能だが、配偶者のみ無職（専業主婦）となることを可能とする（世帯主は必ず働く）。世帯は、有価証券などの金融資産と家屋や耐久消費財からなる非金融資産の2種類の資産を保有するが、 t 時点における金融資産のみを $W_t^{(i)}$ と記述する。世帯主のみ死亡リスクが存在し、世帯主以外は死亡しないと仮定する。また、火災や疾病の発生は考慮しないが、火災保険と医療保険には加入すると想定する（加入しない場合

には保険料を0とすればよい)。世帯の収入構造は世帯主の死亡リスクの発生によって影響を受け、支出額は収入に依存させる。以降、リスク事由の発生の有無に関するパラメータを以下のように設定する。計画最終時点（計画期間数）を T とする。

$\tau_{A,t}^{(i)}$: パス i において、世帯主の生存時点では1、死亡した時点以降では0の値をとる。

$\tau_{L,t}^{(i)}$: パス i において、世帯主が死亡した時点で1、その他の時点では0の値をとる。

ここで、 $\lambda_{L,t}$ を0時点で生存している世帯主の t

時点での死亡率とすると、 $\lambda_{L,t} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{L,t}^{(i)}$ である。

また、 $\tau_{L,t}^{(i)} = 1$ ならば、 $\tau_{A,k}^{(i)} = 0$ ($t \leq k \leq T$)である。

2.3 収入

世帯主は死亡する可能性はあるが、配偶者は死亡しないと仮定しているため、収入構造が異なる。生命保険のキャッシュ・フローは取り除く。世帯主の生命保険に関するキャッシュ・フローは2.6節で記述し、3節のモデルの中で考慮する。配偶者に対する生命保険の収入は考慮しない。以下では個別にその収入構造を説明する。

2.3.1 世帯主の収入

t 時点のパス i において世帯主が稼ぐ賃金は毎月の現金給与額と年間賞与に分けられる。年間賞与が業績によって変動する場合、資産運用の対象とする株式と相関があると仮定する（変動しない場合も含む）。0時点で m_0 歳の世帯主の t 時点における賃金 \tilde{w}_{m_0+t} は(1)式で計算する⁴。

$$\tilde{w}_{m_0+t} = 12\omega_{1,m_0+t} + \bar{\omega}_{2,m_0+t}(1 + \tilde{\mu}_W) \quad (1)$$

$$\tilde{\mu}_W = \bar{\mu}_W + \sigma_W \tilde{\varepsilon}_{W,t}, \quad \tilde{\varepsilon}_{W,t} \sim N(0,1) \quad (2)$$

$$\tilde{\mu}_S = \bar{\mu}_S + \sigma_S \tilde{\varepsilon}_{S,t}, \quad \tilde{\varepsilon}_{S,t} \sim N(0,1) \quad (3)$$

$$\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_{W,t}, \tilde{\varepsilon}_{S,t}) = c_{W,S} \quad (4)$$

ここで、 ω_{1,m_0+t} は毎月の給与額、 $\bar{\omega}_{2,m_0+t}$ は年間賞与の平均値を表す。また、年間賞与の変動率および株式収益率をそれぞれ $\tilde{\mu}_W$ 、 $\tilde{\mu}_S$ と記述し、正規分布に従うと仮定する。期待収益率をそれぞれ $\bar{\mu}_W$ 、 $\bar{\mu}_S$ 、標準偏差をそれぞれ σ_W 、 σ_S 、年間賞与の変動率と株式収益率の相関係数を $c_{W,S}$ とする。賞与が確定的な場合には(1)式の $\tilde{\mu}_W$ を $\bar{\mu}_W$ に置き換える。

賃金から給与所得控除額と所得控除（基礎控除、配偶者控除、扶養控除、社会保険料控除、生命保険料控除、個人年金保険料控除）を差し引いて課税所得金額を計算し、所得税と住民税の税額を求める。定年時に退職金を受け取る場合には、退職所得控除額から計算した退職所得金額を課税所得に加え、税額を求める。住宅ローンを借る場合、住宅借入金等特別控除分が所得税から税額控除される。そして、賃金から所得税、住民税、社会保険料、定年時における退職金などを考慮して可処分所得 $w_t^{(i)}$ を計算する。

世帯主が死亡すると賃金は途切れるが、死亡時に退職金、生命保険金、死亡給付金（個人年金保険）、その後は遺族年金（遺族厚生年金と遺族基礎年金）が得られる。遺族厚生年金は、賃金水準から平均標準報酬金額と平均標準報酬額を計算し、ルールに基づき設定されるので、賃金および年齢（死亡時点）に依存する。一方、遺族基礎年金は家族構成およびその年齢、すなわち時点に依存する。死亡時点 t_m 以降に受け取る遺族厚生年金を $a_{0,t_m}^{(i)}$ 、遺族基礎年金を $a_{1,t}^{(i)}$ とすると、世帯主は $\tau_{L,t_m}^{(i)} = 1$ となるパスで死亡するので、パス i における遺族年金 $a_t^{(i)}$ は

$$a_t^{(i)} = \sum_{t_m=1}^T \tau_{L,t_m}^{(i)} a_{0,t_m}^{(i)} + a_{1,t}^{(i)} \quad (5)$$

と記述できる。（死亡）退職金 $e_{M,t}^{(i)}$ も賃金および年齢（勤続年数）に依存する。また、定年退職後も年金開始年齢（一般に65歳）までは嘱託などで働く場合が多い。その収入は定年時の給与の定数倍（働かない場合には0倍）でボーナスはないと仮定し、定年退職時点の価値に割り戻して、 $PV(E_{M,T}^R)$ と記述する。個人年金保険に加入している場合、計画最終時点までに生存している場合には給付金を受け取るが、その給付金の T 時点の価値を $PV(\Theta_{P,T}^M)$ とする。一方、計画最終時点までに t 時点で世帯主が死亡した場合に受け取る死亡給付金を $\Theta_{P,t}^M$ とする。保有する金融資産 $W_t^{(i)}$ からの投資収益、生命保険以外の収入（キャッシュ・イン・フロー）を $E_{M,t}^{(i)}$ とすると、収入は(6)式のように記述することができる⁵。

$$E_{M,t}^{(i)} = \tau_{A,t}^{(i)} w_t^{(i)} + \left(1 - \tau_{A,t}^{(i)}\right) a_t^{(i)} + \tau_{L,t}^{(i)} \left(e_{M,t}^{(i)} + \Theta_{P,t}^M \right) + \mathbf{1}_{\{t=T\}} \left\{ PV(E_{M,T}^R) + \tau_{A,T}^{(i)} PV(\Theta_{P,T}^M) \right\} \quad (6)$$

⁴ 賃金 \tilde{w}_{m_0+t} をインフレ率 f で調整するならば、 $\tilde{w}_{m_0+t}(1+f)^t$ ($t = 1, \dots, T$)となる。

⁵ 世帯主が死亡した場合、実際には配偶者が受け取ることになるが、モデルの設定上、世帯主の収入として取り扱う。

ここで、 $\mathbf{1}_{\{A\}}$ は A の条件が成立していれば 1、成立しなければ 0 となる定義関数を表す。

2.3.2 配偶者の収入

配偶者も専業主婦ではなく世帯主と同様に働く場合、賃金を毎月の現金給与額と年間賞与に分けて計算するが、年間賞与も確定的と仮定する。そのため、賃金も確定的に決まる。また、控除等も同様に計算する。一方、専業主婦の場合、世帯主が死亡したときに働き始めると仮定する（働かない場合には収入を 0 とすればよいので、働かない場合も含む）。世帯主と同様に働いている場合の賃金収入を $E_{W,t}^0$ （専業主婦の場合は 0）、専業主婦で世帯主が死亡後に働き始めた場合の賃金収入を $E_{W,t}^1$ とする（退職金は 0 と仮定する）。また、配偶者の退職時点を T_W 時点とし、退職金を e_{W,T_W} とする。定年退職後も世帯主と同様に年金開始年齢（一般に 65 歳）まで働き、その収入は定年時の給与の定数倍（働かない場合には 0 倍）でボーナスはないと仮定する。 T 時点以降の収入を T 時点の価値に割り戻した金額を $PV(E_{W,T}^R)$ とする。 $T < T_W$ の場合には定年までの収入、退職金も含める（煩雑になるので、明示的には e_{W,T_W} を記述しない）。個人年金保険に加入している場合にはその給付金の T 時点の価値を $PV(\Theta_{P,T}^W)$ と記述する。これらを考慮した収入 $E_{W,t}^{(i)}$ は (7) 式のように記述することができる。

$$E_{W,t}^{(i)} = E_{W,t}^0 + \left(1 - \tau_{A,t}^{(i)}\right) E_{W,t}^1 + \mathbf{1}_{\{T \geq T_W\}} \mathbf{1}_{\{t=T_W\}} e_{W,T_W} + \mathbf{1}_{\{t=T\}} \left\{ PV(E_{W,T}^R) + PV(\Theta_{P,T}^W) \right\} \quad (7)$$

2.3.3 世帯全体の収入

世帯全体の収入を $E_t^{(i)}$ とすると (8) 式のように計算できる。

$$E_t^{(i)} = E_{M,t}^{(i)} + E_{W,t}^{(i)} \quad (8)$$

2.4 消費支出

消費支出 $C_t^{(i)}$ は生活消費支出 $C_{1,t}^{(i)}$ と非金融資産の購入支出（住居、家財の購入費用や補修費用） $C_{2,t}^{(i)}$ の合計で求める。火災と疾病の発生は考慮せずに、火災保険、医療保険の支払いのみを支出項目として計算する。世帯主の生命保険料は消費支出に含めず、別途計算する。

2.4.1 生活消費支出

生活消費支出を①住宅関連支出、②子供に関する支出（教育・生活支出）、③その他の生活消費支出、④火災保険料、医療保険料、⑤世帯主の個

人年金保険料、⑥配偶者の生命保険料、個人年金保険料の 6 項目 $C_{1,t}^{k(i)}$ ($k=1, \dots, 6$) の和として計算する⁶。

$$C_{1,t}^{(i)} = \sum_{k=1}^6 C_{1,t}^{k(i)} \quad (9)$$

(1) 住宅関連支出

住宅に関する意思決定は世帯にとって家計に大きな影響を与える。現時点および将来の住宅に関しては表 1 に示す組み合わせを考えることにする。

表 1：住宅に関する意思決定

		計画期間中		
		持ち家 (購入)	持ち家 (条件付き購入)	借家 (賃貸)
現在	持ち家	ケース 1	×	×
	在借家(賃貸)	ケース 2	ケース 3	ケース 4

表 1 におけるケース 1 はすでに住宅を購入（保有）し、持ち家に住んでいるケースである。現在、借家住まいの場合には計画期間中の任意（ただし確定的な時点の） t_e 時点で住宅購入に関する意思決定を行う。ケース 2～ケース 4 での t_e 時点における住宅購入に関する意思決定は以下の通りである。

ケース 2: t_e 時点で必ず住宅を購入する

ケース 3: 世帯主が t_e 時点で生存していれば、住宅を購入する（条件付き購入: 生存していなければ借家住まいを続ける）

ケース 4: 借家住まいを続ける

これらを記述するために以下のパラメータを設定する。

χ_1 : 現時点ですすでに持ち家に住んでいるならば 1、借家のままならば 0 の値をとる。

χ_2 : $\chi_1 = 0$ の場合、 t_e 時点で住宅を購入する予定ならば 1、借家のままならば 0 の値をとる。

χ_3 : $\chi_2 = 1$ の場合、 t_e 時点までに世帯主が死亡した場合でも住宅を購入するならば 1、死亡した場合には購入しないならば 0 の値をとる。

ケース 1 の場合は $\chi_1 = 1$ 、ケース 2 の場合は $\chi_1 = 0$ 、 $\chi_2 = 1$ 、 $\chi_3 = 1$ 、ケース 3 の場合は $\chi_1 = 0$ 、 $\chi_2 = 1$ 、 $\chi_3 = 0$ 、ケース 4 の場合は $\chi_1 = 0$ 、 $\chi_2 = 0$ となる。

住宅価格を P_H とすると、保有する金融資産から支払う頭金 H_0 と銀行からの借入金 H_1 で資金を調達する ($P_H = H_0 + H_1$)。また、住宅購入時

⁶ 配偶者は死亡しないと仮定しているため、確定的に保険料の支払いのみが行われる。そのため、本研究においては世帯主とは異なる取り扱いをする。

点 (t_e 時点) では不動産取得税, 登録免許税, 印紙税, 消費税を, 住宅保有時 ($t_e + 1$ 時点以降) には固定資産税, 都市計画税を支払う。これらを除く住宅購入時点でのネット・キャッシュ・アウト・フローは頭金だけであり ($H_0 = P_H - H_1$), 世帯は $t_e + 1$ 時点以降, 借入の期間や金利などの条件に応じて住宅ローン (借入金 H_1) を返済する。団体信用生命保険に加入すれば, 世帯主の死亡時点以降の住宅ローンの返済は免除になる。住宅関連支出 $C_{1,t}^{1(i)}$ は (10) 式のように計算できる⁷。

$$C_{1,t}^{1(i)} = \chi_1 \tau_{A,t}^{(i)} c_t^{11} + (1 - \chi_1) \left(C_{1,t}^{12(i)} + \mathbf{1}_{\{t \geq t_e\}} C_{1,t}^{13(i)} \right) \quad (10)$$

$$C_{1,t}^{12(i)} = \left[1 - \mathbf{1}_{\{t \geq t_e + 1\}} \chi_2 \left\{ \chi_3 + (1 - \chi_3) \tau_{A,t_e}^{(i)} \right\} \right] c_t^{12}$$

$$C_{1,t}^{13(i)} = \chi_2 \left\{ \chi_3 \left(1 - \tau_{A,t_e}^{(i)} \right) + \tau_{A,t}^{(i)} \right\} c_t^{13(i)}$$

($t = t_e, t_e + 1, \dots, T$)

ここで, c_t^{11} はすでに住宅を購入している場合の住宅ローン, 住宅関連の税金などの支払額 (返済が終了している場合には 0), c_t^{12} は現在借家住まいの場合の t 時点の家賃支払額, $c_t^{13(i)}$ は t_e 時点で住宅購入した場合の t 時点の住宅ローン, 住宅関連の税金などの支払額⁸を表す。

(2) 子供に関する支出 (教育・生活支出)

子供に関する支出 (教育・生活支出) $C_{1,t}^{2(i)}$ は (11) 式のように計算できる。

$$C_{1,t}^{2(i)} = \sum_{n=1}^{N^b} c_t^{2n(i)} + \sum_{n=N^b+1}^{N^b+N^a} \tau_{A,t_c,n-1}^{(i)} c_t^{2n(i)} \quad (11)$$

ここで, $c_t^{2n(i)}$ は n 番目の子供にかかる費用, $t_{c,n}$ は将来に n 番目の子供が生まれる時点 (世帯主が $t_{c,n} - 1$ 時点で生きていれば子供が生まれると仮定する), N^b はすでに生まれている子供の数, N^a は将来生む予定の子供の数を表す。教育費は所得水準に依存して変化させる。

⁷ 各ケースに χ_1, χ_2, χ_3 の値を代入すると以下のように記述できる。

$$\text{ケース1: } C_{1,t}^{1(i)} = \tau_{A,t}^{(i)} c_t^{11}$$

$$\text{ケース2: } C_{1,t}^{1(i)} = \mathbf{1}_{\{t \leq t_e\}} c_t^{12} + \mathbf{1}_{\{t \geq t_e\}} \left(1 - \tau_{A,t_e}^{(i)} + \tau_{A,t}^{(i)} \right) c_t^{13(i)}$$

$$\text{ケース3: } C_{1,t}^{1(i)} = \left(1 - \mathbf{1}_{\{t \geq t_e + 1\}} \tau_{A,t_e}^{(i)} \right) c_t^{12} + \mathbf{1}_{\{t \geq t_e\}} \tau_{A,t}^{(i)} c_t^{13(i)}$$

$$\text{ケース4: } C_{1,t}^{1(i)} = c_t^{12}$$

⁸ t_e 時点では頭金, 住宅購入時の税金, $t_e + 1$ 時点以降に住宅ローンおよび住宅保有時の税金などが含まれる。住宅価格分 P_H は非金融資産の購入支出として取り扱われ, $c_t^{13(i)}$ の中の住宅ローンの返済額は借入金 H_1 に対する支払いとして取り扱われる。

(3) その他の生活消費支出

世帯主が生存しているときに想定されるその他の支出を $c_t^{31(i)}$ とする。ただし, 世帯主が死亡した場合には κ 倍に抑えると想定する (例: 支出を 70% に抑える場合には $\kappa = 0.7$)。また, 可処分所得が多く, 余裕があると感じればより多く消費したいと考え, 各時点において退職金を除く可処分所得からすべての消費を差し引いた後の金額が正であれば, $c_t^{32(i)}$ を追加消費する。したがって, その他の生活消費支出 $C_{1,t}^{3(i)}$ は (12) 式のように計算できる。

$$C_{1,t}^{3(i)} = \left\{ \kappa + \tau_{A,t}^{(i)} (1 - \kappa) \right\} c_t^{31(i)} + c_t^{32(i)} \quad (12)$$

(4) 火災保険料, 医療保険料

住宅が賃貸の場合には火災保険料は毎年支払い, 住宅を購入する場合には購入時点で一括払いをすると仮定する。一方, 医療保険料は世帯主・配偶者ともに毎年支払うが, 世帯主が死亡した場合は世帯主の分はそれ以降は支払わない。火災保険料⁹を $c_{F,t}^{4(i)}$, 世帯主・配偶者の医療保険料を c_M^4, c_W^4 とすると, これら保険料の合計 $C_{1,t}^{4(i)}$ は (13) 式のように記述できる。

$$C_{1,t}^{4(i)} = c_{F,t}^{4(i)} + \tau_{A,t}^{(i)} c_M^4 + c_W^4 \quad (13)$$

(5) 世帯主の個人年金保険料

t 時点で支払う個人年金保険の保険料を $Y_{P,t}^M$ とする。個人年金保険の保険料は世帯主が生存しているときのみ支払う。それを $C_{1,t}^{5(i)}$ とすると (14) 式のように記述できる。

$$C_{1,t}^{5(i)} = \tau_{A,t}^{(i)} Y_{P,t}^M \quad (14)$$

(6) 配偶者の生命保険料, 個人年金保険料

配偶者も生命保険や個人年金保険に加入する設定も可能とする。これらの保険料の合計を $C_{1,t}^{6(i)}$ とする。保険料を支払うが, モデル上では配偶者は死亡しないと仮定しているため, 生命保険金や死亡給付金の受け取りは発生しない。

2.4.2 非金融資産の購入支出

非金融資産の購入支出 $C_{2,t}^{(i)}$ は消費水準に影響を受けて決定されると仮定する。その他には t_e 時点で住宅を購入する場合には, $C_{2,t_e}^{(i)}$ に頭金 H_0 を追加する¹⁰。

⁹ 借家と持ち家では火災保険料が異なり, 住居の決定は世帯主の生存・死亡に依存して決まるので, 火災保険料は $P_{i,t}$ に依存する。

¹⁰ 世帯全体の収入項目として (8) 式の中に銀行からの借入金 H_1 を追加し, 購入支出としては住宅価格 P_H を追加するのが正確な書き方である。しかし, ネット・キャッシュ・アウト・フローは頭金だけであり, 煩雑さを避けるために, 頭金のみ非金融資産の購入支出としている。

2.5 投資資産

無リスク資産と J 個のリスク資産に投資する。無リスク資産の t 時点 ($=0, 1, \dots, T-1$) における無リスク金利を r_t と表し、 t 時点から $t+1$ 時点の期間で一定とする。一方、 j ($=1, \dots, J$) 番目のリスク資産の t 時点 ($=0, 1, \dots, T$) における価格 ρ_{jt} と表す。このとき期間 t における収益率 μ_{jt} は (15) 式で定義される。

$$\mu_{jt} = \frac{\rho_{jt}}{\rho_{j,t-1}} - 1 \quad (j = 1, \dots, J) \quad (15)$$

シミュレーション型多期間最適化を用いる場合、無リスク金利 r_t 、リスク資産の収益率 μ_{jt} には様々な分布を想定することが可能である。 μ_{jt} のランダムサンプル (期間 t のパス i のリスク資産 j の収益率) を生成し、リスク資産の価格 ρ_{jt} を計算する。

2.6 生命保険

世帯主を被保険者とし、0 時点で加入し満期時点を T とする生命保険商品と 1 年満期の生命保険商品の組み合わせ (生命保険ポートフォリオ) を用いて、世帯のニーズにマッチしたキャッシュ・フローを構築する方法を考える。生命保険として、無解約返戻金型の平準定期保険 ($b=0$)、通減定期保険 ($b=1$)、収入保障保険 ($b=2$)、1 年定期保険 ($b=3$) の 4 種類を対象とし、 B を 1 年定期保険以外の生命保険の種類の種類集合 ($B = \{0, 1, 2\}$) とする。 T 時点までに世帯主が死亡した場合に保険金を受け取ることができる。世帯主を被保険者とする生命保険は賃金が将来途絶えることに対するヘッジ機能を有する金融商品と位置付けられる。

Hibiki (2007) は団体信用生命保険に加入し世帯主が死亡した場合、住宅ローンは免除されるので住宅購入時に保険金を減額させることが最適であることを示している。本研究では、ファイナンシャル・プランナーがアドバイスできる現実的な方法として、1 年定期保険によって保険金額を調整できる定式化も行っている¹¹。

保険料や保険金は生保標準生命表 (2007) の死亡保険用の死亡率を用いて計算する¹²。 m 歳の死

亡率 (m 歳で生存していた人が $m+1$ 歳までに死亡する割合) を d_m とする。世帯主の 0 時点での年齢を m_0 歳とすると、0 時点で生存している世帯主の t 時点での条件付き生存率 $l_t^{m_0}$ は

$$l_t^{m_0} = (1 - d_{m_0+t}) l_{t-1}^{m_0}, \quad (l_0^{m_0} = 1)$$

である。したがって、0 時点で生存している世帯主が t 時点で死亡する割合は

$$\lambda_{L,t} = l_{t-1}^{m_0} - l_t^{m_0} = d_{m_0+t} l_{t-1}^{m_0}$$

と計算される。 $\lambda_{L,t}$ は 0 時点での年齢 m_0 に依存するが、 m_0 は省略して記述する。

2.6.1 保険料の計算

1 年定期保険以外の生命保険の保険料は平準払いで支払われる場合を考える¹³。0 時点で T 年満期の生命保険に加入するので、0 時点から $T-1$ 時点までを平準保険料の支払期間とする。 $\zeta_{L,b}$ を生命保険の純保険料に対する付加保険料比率とすると、期待保険金受け取り額 (保険金現価) 1 円に対する保険料の支払い (保険料現価) は $1 + \zeta_{L,b}$ 円であり、これを 1 単位とする。保険料はその時点で生存している被保険者のみが支払うことになるので、生命保険 b の単位当たりの平準保険料 $y_{L,b}$ は (16) 式で求められる。

$$y_{L,b} = \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{l_t^{m_0}}{(1 + g_L)^t} \right\}^{-1} (1 + \zeta_{L,b}) \quad (b \in B) \quad (16)$$

ここで、 g_L は生命保険の予定利率とする。

一方、1 年定期保険の単位当たりの保険料は (17) 式のように記述する。

$$y_{L,3} = 1 + \zeta_{L,3} \quad (17)$$

2.6.2 保険金額およびキャッシュ・フローの計算

収支相等の原則に基づき、本研究で対象とする 4 種類の生命保険に対する単位当たりの保険金額を計算する。定期保険 (平準定期保険、通減定期保険、1 年定期保険) のように、世帯主の死亡時に一時的に受け取る生命保険には相続税がかかる。しかし、生命保険の受取人が配偶者である場合には、1 億 6,000 万円までは実質非課税であり、煩雑さを避けるために、相続税は考慮せずにキャッシュ・フローを計算する。一方、収入保障保険のように毎年年金として受け取るタイプは、死亡時点での相続税に加えて、年金額 (給付金) から払込済みの保険料相当額を引いた金額が雑所得と

¹¹ モデル上は住宅購入時点を固定して最適化問題を解くので、住宅購入時点を満期とする生命保険に入り、さらに住宅購入時点でスタートする生命保険の最適加入金額を求める方がよいと思うかもしれない。しかし、実際の住宅購入時点は不確定であるため、住宅購入時点を満期とする生命保険を購入することは満期リスクを負うことになる。その満期リスクを避けるために 1 年定期保険で調整できるモデル化を行う。

¹² 枇々木 (2008) でも生保標準生命表 (2007) が用いられている。一方、枇々木ら (2005-2007) の数値分析では生保標準生命表 (1996) が用いられている。

¹³ 一時払い、平準払いともに可能であるが、以降の定式化では煩雑さを避けるために平準払いのみを記述する。

して計算され、所得税の対象でもあった。枇々木 (2008) はこの点を考慮したモデル化を行っていたが、2010年7月6日の最高裁判決で所得税と相続税の二重課税は違法であり、相続税の課税対象となった部分は所得税の対象とならないと判断された。給付金から相続税対象部分を控除すると、実際の所得税はそれほど大きくならないと考え、本研究では所得税分も無視して問題を解く¹⁴。

(1) 平準定期保険, 逓減定期保険

このタイプの保険に対応するために、生命保険金額が可変の場合について説明する。 t 時点で死亡したときの単位当たり保険金額 (保険金関数) $\theta_{L,b,t}$ は

$$\theta_{L,b,t} = \eta_{L,b,t} \left\{ \sum_{k=1}^T \frac{\eta_{L,b,k} \lambda_{L,k}}{(1+gL)^k} \right\}^{-1} \quad (b \in \{0, 1\}) \quad (18)$$

となる。ここで、 $\eta_{L,b,t}$ は各時点の保険金に対する比例係数を表す。平準定期保険 ($b=0$) は $\eta_{L,0,t} = 1$ 、逓減定期保険 ($b=1$) は $\eta_{L,1,t} \leq \eta_{L,1,t-1}$ で、たとえば、 $\eta_{L,1,t} = T - t + 1$ と設定すればよい。生命保険を1単位購入すると、世帯のキャッシュ・フローは0時点では $-y_{L,b}$ 、1時点から $T-1$ 時点では $\tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,b,t} - \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,b}$ 、 T 時点では $\tau_{L,T}^{(i)} \theta_{L,b,T}$ となる。以降の定式化では、平準定期保険の単位当たり保険金額には $\theta_{L,0,t}$ の代わりに、 $\theta_{L,0}$ を用いる。

(2) 収入保障保険

収入保障保険には様々なタイプがあるが、簡単のため、最低保証期間および保険期間終了後の保険金受取期間はないと仮定する。給付金の増加率を r_g とし、1時点の単位当たり給付金 (保険金額) を $\theta_{L,2}$ とすると、世帯主の死亡時点以降に満期まで受け取れる t 時点の単位当たり給付金は $\theta_{L,2,t} = \theta_{L,2}(1+r_g)^{t-1}$ となる。1時点における単位当たり給付 $\theta_{L,2}$ は (19) 式で求めることができる。

$$\theta_{L,2} = \left\{ \sum_{t=1}^T \frac{(1-l_t^{m_0})(1+r_g)^{t-1}}{(1+gL)^t} \right\}^{-1} \quad (19)$$

生命保険を1単位購入すると、キャッシュ・フローは0時点では $-y_{L,2}$ 、1時点から $T-1$ 時点では

$$(1 - \tau_{A,t}^{(i)}) \theta_{L,2,t} - \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,2}, \quad T \text{ 時点では}$$

$$(1 - \tau_{A,T}^{(i)}) \theta_{L,2,T} \text{ となる。}$$

(3) 1年定期保険

単位当たりの保険金額 $\theta_{L,3,t}$ は (20) 式で求めることができる。

$$\theta_{L,3,t} = \frac{1+gL}{\lambda_{L,t}} \quad (20)$$

3. 多期間最適化モデル

枇々木 (2008) の資産配分・生命保険購入を決定するモデルを修正したモデルを3.1節に示す。3.2節で説明する集約モデルと区別するためにオリジナルモデルと呼ぶ。枇々木 (2008) では資産配分は所与で生命保険のみを決定するモデルも提案している。それを修正したモデルについては3.3節に示す。

3.1 オリジナルモデル

3.1.1 記号

(1) 添字

j : リスク資産番号を表す添字 ($j=1, \dots, J$)。 J はリスク資産数を表す。

t : 時点を表す添字 ($t=1, \dots, T$)。 T は期間数または計画最終時点を表す。

i : パス番号を表す添字 ($i=1, \dots, I$)。 I はパスの本数を表す。

b : 1年定期保険以外の生命保険を表す添字 ($b \in B$)。 B は3種類の生命保険の集合を表す ($b=0$ は平準定期保険, $b=1$ は逓減定期保険, $b=2$ は収入保障保険)

添字 j, t, i, b が上述する範囲と同じ場合、以下では記述を省略する。

(2) パラメータ

ρ_{j0} : 0時点のリスク資産 j の価格

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点のパス i のリスク資産 j の価格

r_0 : 0時点 (期間1) の金利

$r_{t-1}^{(i)}$: $t-1$ 時点 (期間 t) のパス i の金利 ($t=2, \dots, T$)

L_C : T 時点の富 (最終富) のCVaRの下限值

L_v : 無リスク資産の平均投資比率の下限值

$\tau_{A,t}^{(i)}$: パス i において、世帯主の生存時点では1、死亡した時点以降では0の値をとる。

$\tau_{L,t}^{(i)}$: パス i において、世帯主が死亡した時点で1、その他の時点では0の値をとる。

$m_{L,b}$: 既契約の生命保険 b の契約件数

$Y_{L,b}^l$: 既契約の l 番目の生命保険 b の平準保険料 ($l=1, \dots, m_{L,b}$)

$\Theta_{L,0}^l$: 既契約の l 番目の平準定期保険の保険金 ($l=1, \dots, m_{L,0}$)

¹⁴ 所得税分も考慮する場合には、枇々木 (2008) のモデル化の方法を利用すればよい。ただし、所得税の課税対象は小さいので、考慮することによって増加する計算負荷に比べて、その効果は少ないと考えられる。

- $\Theta_{L,1,t}^l$: 既契約の l 番目の通減定期保険の t 時点の保険金 ($l=1, \dots, m_{L,1}$)
 $\Theta_{L,2,t}^l$: 既契約の l 番目の収入保障保険の t 時点の給付金 ($l=1, \dots, m_{L,2}$)
 $T_{1,L,b}^l$: 既契約の l 番目の生命保険 b の保険料支払期間 ($l=1, \dots, m_{L,b}$)
 $T_{2,L,b}^l$: 既契約の l 番目の生命保険 b の保険金受取期間 ($l=1, \dots, m_{L,b}$)
 $U_{L,b}^l$: 既契約の l 番目の生命保険 b の解約割合の上限値 ($l=1, \dots, m_{L,b}$)
 $y_{L,b}$: 新規契約の生命保険 b の単位当たり平準保険料
 $y_{L,3}$: 1年定期保険の単位当たり保険料
 $\theta_{L,0}$: 0時点で購入する平準定期保険の単位当たり保険金
 $\theta_{L,1,t}$: 0時点で購入する通減定期保険の t 時点の単位当たり保険金
 $\theta_{L,2,t}$: 0時点で購入する収入保障保険の t 時点の単位当たり給付金
 $\theta_{L,3,t}$: $t-1$ 時点で購入する t 時点の1年定期保険の単位当たり保険金
 $E_t^{(i)}$: t 時点のパス i における可処分所得収入 (定年時退職金による可処分所得も含む), 遺族年金収入, 死亡退職金, 個人年金保険・給付金の合計
 $C_t^{(i)}$: t 時点のパス i における消費支出
(3) 決定変数¹⁵
 z_{jt} : t 時点のリスク資産 j への投資量 (単位数) を計算する基準変数 ($t=0, \dots, T-1$)¹⁶
 v_0 : 0時点の無リスク資産 (現金)
 $v_t^{(i)}$: t 時点のパス i の無リスク資産 (現金) ($t=1, \dots, T-1$)
 $h_{L,b}^l$: 既契約の l 番目の生命保険 b の解約割合 ($l=1, \dots, m_{L,b}$)
 $u_{L,b}$: 0時点で購入する生命保険 b の単位数
 $u_{L,3,t}$: t 時点で購入する1年定期保険の単位数 ($t=0, \dots, T-1$)
 V_β : T 時点の富の確率水準 β のバリュエーション・アット・リスク (β -VaR)
 $W_t^{(i)}$: t 時点のパス i の富
 $q^{(i)}$: $W_T^{(i)}$ の β -VaR を下回る部分.

$$q^{(i)} \equiv \max(V_\beta - W_T^{(i)}, 0)$$

¹⁵ $V_\beta, W_T^{(i)}, q^{(i)}$ は投資・保険に関する決定変数を用いて表される中間変数であるが, 定式化の中では決定変数として取り扱われる.

¹⁶ 投資比率決定戦略モデルにおいては投資比率を表す決定変数となる.

3.1.2 収入・支出および保険によるキャッシュ・フロー

資産運用以外の世帯のキャッシュ・イン・フロー (賃金などの収入, 保険金) を(22)式, キャッシュ・アウト・フロー (消費, 保険料¹⁷) を(21), (23)式, ネット・キャッシュ・フローを(24)式に示す.

$$D_0^- = \sum_{b \in B} \sum_{l=1}^{m_{L,b}} Y_{L,b}^l (1 - h_{L,b}^l) + \sum_{b \in B} y_{L,b} u_{L,b} + y_{L,3} u_{L,3,0} \quad (21)$$

$$D_t^{+(i)} = E_t^{(i)} + \sum_{b \in B} \sum_{l=1}^{m_{L,b}} L_{t,b}^{+(i)} (1 - h_{L,b}^l) + \tau_{L,t}^{(i)} (\theta_{L,0} u_{L,0} + \theta_{L,1,t} u_{L,1} + \theta_{L,3,t} u_{L,3,t-1}) + (1 - \tau_{A,t}^{(i)}) \theta_{L,2,t} u_{L,2} \quad (22)$$

$$D_t^{- (i)} = C_t^{(i)} + \sum_{b \in B} \sum_{l=1}^{m_{L,b}} L_{t,b}^{- (i)} (1 - h_{L,b}^l) + \mathbf{1}_{\{t \neq T\}} \tau_{A,t}^{(i)} \left(\sum_{b \in B} y_{L,b} u_{L,b} + y_{L,3} u_{L,3,t} \right) \quad (23)$$

$$D_t^{(i)} = D_t^{+(i)} - D_t^{- (i)} \quad (24)$$

ここで,

$$L_{t,b}^{+(i)} = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{t \leq T_{2,L,0}^l\}} \tau_{L,t}^{(i)} \Theta_{L,0}^l & (b=0) \\ \mathbf{1}_{\{t \leq T_{2,L,1}^l\}} \tau_{L,t}^{(i)} \Theta_{L,1,t}^l & (b=1) \\ \mathbf{1}_{\{t \leq T_{2,L,2}^l\}} (1 - \tau_{A,t}^{(i)}) \Theta_{L,2,t}^l & (b=2) \end{cases}$$

$$L_{t,b}^{- (i)} = \mathbf{1}_{\{t \leq T_{1,L,b-1}^l\}} \tau_{A,t}^{(i)} Y_{L,b}^l$$

である.

3.1.3 定式化

最終富のCVaRの下限制約のもとで, 期待最終富を最大化するように定式化すると, 以下のよう記述できる.

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \quad (25)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^J \rho_{j0} g(a_{j0}, z_{j0}) + v_0 + D_0^- = W_0 \quad (26)$$

$$(W_1^{(i)} =) \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} g(a_{j0}, z_{j0}) + (1 + r_0) v_0 + D_1^{(i)} \\ = \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} g(a_{j1}^{(i)}, z_{j1}^{(i)}) + v_1^{(i)} \quad (27)$$

¹⁷ T 時点では保険料支払いが無い場合, 取り除く.

$$(W_t^{(i)} =) \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} g(a_{j,t-1}^{(i)}, z_{j,t-1}) + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} + D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} g(a_{j,t}^{(i)}, z_{j,t}) + v_t^{(i)} \quad (t = 2, \dots, T-1) \quad (28)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{jT}^{(i)} g(a_{j,T-1}^{(i)}, z_{j,T-1}) + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} + D_T^{(i)} \quad (29)$$

$$W_T^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \quad (30)$$

$$V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \geq L_C \quad (31)$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, T-1) \quad (32)$$

$$v_0 \geq L_v \left(\sum_{j=1}^J \rho_{j0} g(a_{j0}, z_{j0}) + v_0 \right) \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^I v_t^{(i)} \geq L_v \left(\sum_{i=1}^I W_t^{(i)} \right) \quad (t = 1, \dots, T-1) \quad (34)$$

$$u_{L,b} \geq 0 \quad (b \in B) \quad (35)$$

$$u_{L,3,t} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, T-1) \quad (36)$$

$$0 \leq h_{L,b}^l \leq U_{L,b}^l \quad (b \in B; l = 1, \dots, m_{L,b}) \quad (37)$$

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (38)$$

ここで、 $g(a_{jt}^{(i)}, z_{jt})$ は投資量関数を表し、 z_{jt} の関数として定義する。例えば、投資量関数を $g(a_{jt}^{(i)}, z_{jt}) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}$ とすると、 $a_{jt}^{(i)} = 1$ のときは投資量決定戦略、 $a_{jt}^{(i)} = \frac{W_t^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}}$ のときは投資比率決定戦略を表す。また、 V_β は符号無制約である。

(25)式は期待最終富、(26)式は0時点の予算制約式、(27)、(28)式は期中のキャッシュ・フロー制約式、(29)式は最終富、(30)、(31)式はCVaRを計算するための制約式およびCVaR下限制約式、(32)～(34)式は資産の下限制約式（非負制約式を含む）、(35)、(36)式は新規契約の生命保険の非負制約式、(37)式は既契約の生命保険の解約割合に関する制約式を表す。

最終富に非負制約を課す場合には

$$W_T^{(i)} \geq 0 \quad (39)$$

を含めればよい。また、最終富は世帯主の死亡の有無に影響を受けやすい。そこで、(40)、(41)式に示す世帯主の死亡時点別の条件付き期待最終富 $\overline{W}_t^{\tau_L}$ 、生存時の条件付き期待最終富 $\overline{W}_0^{\tau_L}$ に対する制約を課すことも考える。

$$\overline{W}_t^{\tau_L} = \frac{1}{|\tau_{L,t}|} \sum_{i=1}^I \tau_{L,t}^{(i)} W_T^{(i)} \geq 0 \quad (40)$$

$$\overline{W}_0^{\tau_L} = \frac{1}{|\tau_{A,T}|} \sum_{i=1}^I \tau_{A,T}^{(i)} W_T^{(i)} \geq 0 \quad (41)$$

ここで、 $|\tau_{L,t}| = \sum_{i=1}^I \tau_{L,t}^{(i)}$ 、 $|\tau_{A,T}| = \sum_{i=1}^I \tau_{A,T}^{(i)}$ である。

3.2 集約モデル

3.2.1 集約モデルの考え方とモデル化の方法

計画期間数を T から K 期間 ($T > K$) へ短縮するモデル化の方法を示す。期間を短縮したモデルを集約モデルと呼ぶ。最も簡単な方法は1期間の長さをたとえば、1年から3年にし、価格データや死亡事故については3年ごとのデータ、賃金収入や消費支出は3年間をひとまとめにしたデータを用いる方法である。しかし、この方法は1年ごとのオリジナルモデルに比べて計算精度は悪くなる可能性が高い。そこで、オリジナルモデルに使われる1期間（1年間）ごと、もしくは1時点（1年）ごとの入力パラメータを利用してモデル化する方法を検討する。

オリジナルモデルの時点が $t = 0, 1, 2, \dots, T$ とし、集約モデルの時点が $t = 0, t_1, t_2, \dots, t_{K-1}, T$ ($t_0 = 0, t_K = T$) とする。計画期間の長さは同じだが、期間の区切り方を変更し、計画期間数を少なくする。例えば、 $T = 30, K = 10$ として等間隔で期間を区切る場合、区切る時点は $t = 0, 3, 6, \dots, 27, 30$ となる。また、集約モデルの期間の中に含まれるオリジナルモデルの期間を S_k とする。具体的には、 $S_1 = \{1, \dots, t_1\}$ 、 $S_2 = \{t_1 + 1, \dots, t_2\}$ 、 \dots 、 $S_K = \{t_{K-1} + 1, \dots, T\}$ であり、一般的には $S_k = \{t_{k-1} + 1, \dots, t_k\}$ である。

集約モデルの時点は t_k となるので、 S_k の中の最終時点 t_k を除く時点ではリスク資産の投資決定を変更しない。例えば、投資量決定戦略では「リバランスを行わない」、投資比率決定戦略では「コンスタント・リバランスを行う」戦略を仮定する。このことはオリジナルモデルの決定変数を $z_{j,t_{k-1}} = z_{j,t_{k-1}+1} = \dots = z_{j,t_k-1}$ と考えることと同じである。すなわち、集約モデルはオリジナルモデルの途中で戦略を固定するという制約を課したモデルとなる。このモデルを集約モデル1と呼ぶ。

ところで、集約モデルを構築する目的はリバランスの回数を減らすことではなく、期間数を減らして問題の規模を縮小し、高速に問題を解くことである。そこで、集約モデルの時点以外のオリジナルモデルの時点（ S_k の中の最終時点 t_k を除く時点）の決定変数を集約モデルの時点の決定変数の加重平均と考える（線形近似を行う）モデル化の方法も提案する¹⁸。

¹⁸ T 時点ではリバランスを行わないが、加重平均をとるための変数をリスク資産の決定変数として設定する。

このモデルを集約モデル 2 と呼ぶ。

図 3 に、 $T=8$ で $K=4$ ($t_1=2, t_2=4, t_3=6, t_4=8$) の場合の集約モデルの決定変数の設定方法の例を示す。

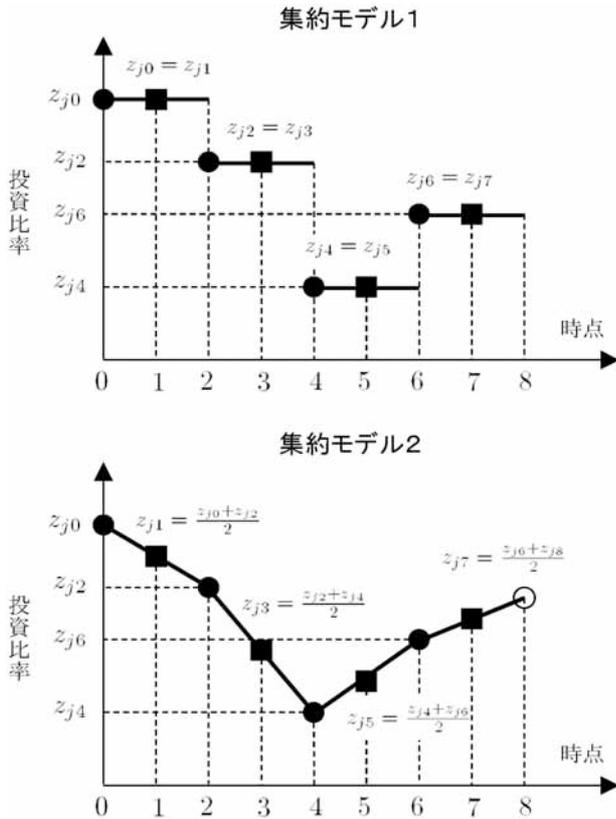


図 3：最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解

以降、2 種類のタイプの集約モデルの定式化を示す。投資量関数は $g(a_{jt}^{(i)}, z_{jt}) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}$ とし、右辺の形式で定式化の中に含める。

3.2.2 集約モデル 1 の定式化

集約モデル 1 は以下のように定式化することができる。ただし、記述の煩雑さを避けるため、 $\rho_{jt_k}^{(i)}, a_{jt_k}^{(i)}$ 以外は t_k を k と書き直す。また、添字 k の範囲が ($k=1, \dots, K$) の場合には記述を省略する。

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_K^{(i)} \quad (42)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^J \rho_{j0} a_{j0} z_{j0} + v_0 + D_0^- = W_0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} W_k^{(i)} &= \sum_{j=1}^J \rho_{jk}^{(i)} z_{j,k-1} + \left(1 + \check{r}_k^{(i)}\right) v_{k-1}^{(i)} + \check{D}_k^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^J \rho_{jt_k}^{(i)} a_{jt_k}^{(i)} z_{jk} + v_k^{(i)} \\ &\quad (k=1, \dots, K-1) \end{aligned} \quad (44)$$

$$W_K^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{jK}^{(i)} z_{j,K-1} + \left(1 + \check{r}_K^{(i)}\right) v_{K-1}^{(i)} + \check{D}_K^{(i)} \quad (45)$$

$$W_K^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \quad (46)$$

$$V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \geq L_C \quad (47)$$

$$z_{jk} \geq 0 \quad (k=0, \dots, K-1) \quad (48)$$

$$v_0 \geq L_v \quad (49)$$

$$\sum_{i=1}^I v_k^{(i)} \geq L_v \left(\sum_{i=1}^I W_k^{(i)} \right) \quad (k=1, \dots, K-1) \quad (50)$$

$$u_{L,b} \geq 0 \quad (b \in B) \quad (51)$$

$$u_{L,3,k} \geq 0 \quad (k=0, \dots, K-1) \quad (52)$$

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (53)$$

ここで V_β は符号無制約である。また、

$$\check{r}_{t_1}^{(i)} = (1 + r_0) \prod_{k \in S_1 - \{1\}} \left(1 + r_{k-1}^{(i)}\right)$$

$$\check{r}_{t_k}^{(i)} = \prod_{t \in S_k} \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) \quad (k=2, \dots, K)$$

$$R_t^{(i)} = \prod_{u=t}^{t_k-1} \left(1 + r_u^{(i)}\right) \quad (t \in S_k - \{t_k\})$$

$$R_{t_k}^{(i)} = 1$$

$$\begin{aligned} \check{\rho}_{jt_k}^{(i)} &= \sum_{t \in S_k - \{t_k\}} R_t^{(i)} \rho_{jt}^{(i)} \left(a_{jt-1}^{(i)} - a_{jt}^{(i)}\right) \\ &\quad + \rho_{jt_k}^{(i)} a_{jt_k-1}^{(i)} \end{aligned}$$

である。資産運用以外のキャッシュ・フローは生命保険に関する決定変数を含めて記述される。3 種類の生命保険の購入単位数は 0 時点での決定であるため、期間の集約に関係ないが、1 年定期保険はリスク資産と同様に書き換えが必要である。1 年定期保険の単位数の決定変数を $u_{1,t_{k-1}} = u_{1,t_{k-1}+1} = \dots = u_{1,t_k-1}$ と考えると、 $\check{D}_{t_k}^{(i)}$ は (54) 式のように記述できる。ここで、1 年定期保険の部分以外は集約モデル 1 と 2 は同じであるので、まとめて $\check{H}U_{t_k}^{(i)}$ と記述する。

$$\begin{aligned} \check{D}_{t_k}^{(i)} &= \check{H}U_{t_k}^{(i)} \\ &\quad + \left\{ \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,3,t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{t \in S_k - \{t_k\}} R_t^{(i)} \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,3} \right\} u_{L,3,t_{k-1}} \\ &\quad - \mathbf{1}_{\{k \leq K-1\}} \tau_{A,t_k}^{(i)} y_{L,3} u_{L,3,t_k} \\ &\quad (k=1, \dots, K-1) \end{aligned} \quad (54)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\check{H}U_{t_k}^{(i)} &= \sum_{b \in B} \sum_{l=1}^{m_{L,b}} \check{L}_{t_k,b}^{l(i)} (1 - h_{L,b}^l) \\
&+ \left\{ \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \left(\tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,0} - \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1}_{\{k=K\}} \tau_{A,t_K}^{(i)} y_{L,0} \right\} u_{L,0} \\
&+ \left\{ \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \left(\tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,1,t} - \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1}_{\{k=K\}} \tau_{A,t_K}^{(i)} y_{L,1} \right\} u_{L,1} \\
&+ \left[\sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \left\{ \left(1 - \tau_{A,t}^{(i)} \right) \theta_{L,2,t} - \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1}_{\{k=K\}} \tau_{A,t_K}^{(i)} y_{L,2} \right] u_{L,2} \\
&+ \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \left(E_t^{(i)} - C_t^{(i)} \right) \\
&\quad (k = 1, \dots, K-1) \\
\check{L}_{t_k,b}^{l(i)} &= \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \left(L_{t,b}^{+(i)} - L_{t,b}^{-l(i)} \right) \\
&\quad (k = 1, \dots, K-1; l = 1, \dots, m_{L,b})
\end{aligned} \tag{59}$$

である。

3.2.3 集約モデル2の定式化

オリジナルモデルの時点に対する決定変数 z_{jt} は集約モデルの決定変数 z_{j,t_k} を用いて、(55)式のように表すことができる ($t=0$ を除く)。

$$z_{jt} = \left(\frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} \right) z_{j,t_{k-1}} + \left(\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right) z_{j,t_k} \quad (t \in S_k - \{t_k\}) \tag{55}$$

また、リスク資産の決定変数の加重平均と同様に、1年定期保険の単位数の決定変数の加重平均を定式化すると(56)式のように記述することができる。

$$u_{L,3,t} = \left(\frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} \right) u_{L,3,t_{k-1}} + \left(\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right) u_{L,3,t_k} \quad (t \in S_k - \{t_k\}) \tag{56}$$

集約モデル2はこれらを用いて、以下のように定式化することができる。

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_K^{(i)} \tag{57}$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^J \rho_{j0} a_{j0} z_{j0} + v_0 + D_0^- = W_0 \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
W_k^{(i)} &= \sum_{j=1}^J \check{\rho}_{j,t_k}^{-(i)} z_{j,k-1} + \left(1 + \check{r}_k^{(i)} \right) v_{k-1}^{(i)} + \check{D}_k^{(i)} \\
&= \sum_{j=1}^J \check{\rho}_{j,t_k}^{+(i)} z_{j,k} + v_k^{(i)}
\end{aligned}$$

$$(k = 1, \dots, K-1) \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
W_K^{(i)} &= \sum_{j=1}^J \left(\check{\rho}_{j,t_K}^{-(i)} z_{j,K-1} - \check{\rho}_{j,t_K}^{+(i)} z_{j,K} \right) \\
&\quad + \left(1 + \check{r}_K^{(i)} \right) v_{K-1}^{(i)} + \check{D}_K^{(i)} \tag{60}
\end{aligned}$$

$$z_{j,K-1} + (t_K - t_{K-1} - 1) z_{j,K} \geq 0 \tag{61}$$

$$u_{L,3,K-1} + (t_K - t_{K-1} - 1) u_{L,3,K} \geq 0 \tag{62}$$

(46)～(53)式

ここで、

$$a_{jt}^{-(i)} = (t_k - t + 1) a_{j,t-1}^{(i)} - (t_k - t) a_{jt}^{(i)}$$

$$a_{jt}^{+(i)} = (t - t_{k-1}) a_{jt}^{(i)} - (t - t_{k-1} - 1) a_{j,t-1}^{(i)}$$

$$\check{\rho}_{j,t_k}^{-(i)} = \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \rho_{jt}^{(i)} a_{jt}^{-(i)}$$

$$\check{\rho}_{j,t_k}^{+(i)} = \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} R_t^{(i)} \rho_{jt}^{(i)} a_{jt}^{+(i)}$$

$$(k = 1, \dots, K-1)$$

$$\check{\rho}_{j,t_K}^{+(i)} = \frac{1}{|S_K|} \sum_{t \in S_K} R_t^{(i)} \rho_{jt}^{(i)} a_{jt}^{+(i)} - R_{t_K}^{(i)} \rho_{j,t_K}^{(i)} a_{j,t_K}^{(i)}$$

である。期間 S_K に含まれる $z_{j,t_{K-1}+1} \sim z_{j,t_K-1}$ を記述するために補助変数として z_{j,t_K} を導入し、

(29)式を(60)式で $W_{t_K}^{(i)} (W_K^{(i)})$ を記述する。

また、 $\check{D}_{t_k}^{(i)}$ は(63)式のように記述できる。

$$\begin{aligned}
\check{D}_{t_k}^{(i)} &= \check{H}U_{t_k}^{(i)} + \left(\check{\theta}_{L,3,t_k}^{-(i)} - \check{y}_{L,3,t_k}^{-(i)} \right) u_{L,3,t_{k-1}} \\
&\quad + \left(\check{\theta}_{L,3,t_k}^{+(i)} - \check{y}_{L,3,t_k}^{+(i)} \right) u_{L,3,t_k} \tag{63}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\check{\theta}_{L,3,t_k}^{-(i)} = \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} (t_k - t + 1) R_t^{(i)} \tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,3,t}$$

$$\check{\theta}_{L,3,t_k}^{+(i)} = \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} (t - t_{k-1} - 1) R_t^{(i)} \tau_{L,t}^{(i)} \theta_{L,3,t}$$

$$\check{y}_{L,3,t_k}^{-(i)} = \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} (t_k - t) R_t^{(i)} \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,3}$$

$$\check{y}_{L,3,t_k}^{+(i)} = \begin{cases} \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k} (t - t_{k-1}) R_t^{(i)} \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,3} \\ \quad (k = 1, \dots, K-1) \\ \frac{1}{|S_k|} \sum_{t \in S_k - \{t_k\}} (t - t_{k-1}) R_t^{(i)} \tau_{A,t}^{(i)} y_{L,3} \\ \quad (k = K) \end{cases}$$

である。

3.3 資産配分（投資戦略）を所与とするモデルの定式化

個人の金融資産に占める株式比率を求める簡便な投資戦略として、米国では「100-年齢」(%)

を目安とする方法が広く知られている（角田, 2007）. また, 平均・分散モデルなどの1期間モデルを用いる場合には, コンスタント・リバランス戦略を行う. これらの投資戦略を評価するには, 資産配分を所与とするモデルを用いる必要がある. 枇々木 (2008) はこのような資産配分を所与とするモデルを示している. 本研究では既存の生命保険の解約なども含めて, このモデルを少し修正する. ただし, 形式上は資産運用以外のキャッシュ・フロー $D_t^{(i)}$ の定式化が代わるだけである. 資産配分を所与とすると, 投資戦略にかかわらず, 多期間最適化モデルは簡単な線形計画問題として記述することができる.

リスク資産 j の投資比率を x_{jt} , 無リスク資産の投資比率を x_{0t} とすると, ポートフォリオの収益率 $\mu_{pt}^{(i)}$ は (64), (65) 式のように計算される.

$$\mu_{p1}^{(i)} = \sum_{j=1}^J \mu_{j1}^{(i)} x_{j0} + r_0 x_{00} \quad (64)$$

$$\mu_{pt}^{(i)} = \sum_{j=1}^J \mu_{jt}^{(i)} x_{j,t-1} + r_{t-1}^{(i)} x_{0,t-1} \quad (t = 2, \dots, T) \quad (65)$$

最終富 $W_T^{(i)}$ は (66) 式で計算できる.

$$W_T^{(i)} = CR_1^{(i)} (W_0 - D_0^-) + \sum_{u=1}^{T-1} CR_{u+1}^{(i)} D_u^{(i)} + D_T^{(i)} \quad (66)$$

ここで, $CR_u^{(i)} = \prod_{k=u}^T (1 + \mu_{p,k}^{(i)})$ である. 3.1節のモデルの (26) ~ (29), (32) ~ (34) 式の代わりに, (66) 式を用いて問題を解くことができる. 定式化を以下に示す.

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \quad (67)$$

制約条件 (30), (31), (35) ~ (38), (66) 式

4. FP分析ツールとモデルの実装

4.1 FP分析ツール

4.1.1 先行研究

個人投資家向けに様々なALMモデルやツールが開発されている. いくつかの文献を紹介する.

(1) Berger and Mulvey (1998)

ALMシステムを個人投資家向けに拡張した Home Account Advisor™ に用いられている多期間モデルを示している. 退職, 住宅購入, 子供の大学の授業料という典型的な目標を含めて, 個人投資家に分かりやすいようにコンスタント・リバ

ランス戦略でリスク資産の投資比率を決めるモデル化をしている. 非凸型混合整数計画問題を解くために, タブサーチ法を用いている.

(2) Consiglio, Cocco and Zenios (2004)

Prometeia S.r.l (イタリアの金融コンサルティング会社) がイタリアの銀行のために開発した Webベースの個人向け資産配分システムについて紹介している. 戦略的資産配分, ファンドのパフォーマンス評価の提供, リスク分析の3種類のツールを含んでいる. Consiglio, Cocco and Zenios (2007) のALMモデルを用いて資産配分を決定している.

(3) Kotlikoff (2008)

個人のFPのために, 消費の平準化によって期待効用を最大化する経済学アプローチについて議論している. 動的計画法を用いて問題を解くシステムが, Economic Security Planning 社によって開発されたソフトウェアESPlanner に実装されている.

(4) Medova, Murphy, Owen and Rehman (2008)

シナリオ・ツリーによる動的確率計画法を使って, Cambridge Systems Associates社が実装した個人投資家に対するALMシステムのiALM (individual Asset Liability Management) ツールを説明している. 家計のキャッシュ・フローを考慮して, 最適な資産配分と資金の貸借に関する決定を行う. 3つの家計に対する分析も行っている.

(5) 長島 (2006)

FPツールの重要性とともに, ツールに必要な機能とその発展段階を述べている. ツールはアセット・アロケーションの推奨, モンテカルロ・シミュレーションによる分析だけでなく, 金融資産に関する包括的なコンサルティングを行えるツールへと発展している. 米国で普及しているツールとして, EISI社の「ナビプラン」とワコビア証券の「エンビジョン」の特徴を説明している.

4.1.2 FPツールのための最適化モデルの利用

著者は4.1.1項で紹介した海外の分析ツールを実際に確認してはいないが, 論文を読む限り, 確率的なシミュレーションや最適化モデルをベースに作られている. 本研究においても3.1節以降のシミュレーション型多期間最適資産形成モデルをベースにした分析ツール¹⁹の提案を行う. 多期間最適資産形成モデルを理解するためには, FP資格を取得するために使われている日本FP協会の「FPテキスト」やきんぎいの「FP技能検定教本」

¹⁹ このツールの中には最適化だけでなく, モンテカルロ・シミュレーションも含み, 分析を行うことができる.

(以降、まとめてFPテキストと呼ぶ)の内容だけでは不十分である。その理由は、FPテキストは以下のように個別の項目は詳細に書かれているが、キャッシュ・フローの不確実性に対して全体を融合した考え方が書かれていないからである。

- 「パーソナル・ファイナンス」では世帯主が死亡しない条件の下でのライフプランニング(教育・住宅・社会保険・医療)、リタイアメントプランニング(公的年金など)を確定的なキャッシュ・フロー表で記述している。
- 「金融資産運用設計」では平均・分散アプローチによるリスク・リターン分析について書かれているが、キャッシュ・フロー表では資産配分は所与で、平均運用率での確実な運用を仮定している。また、『最適化』の項目はない。
- 「リスクマネジメント」では生命保険について詳細に説明されている。現時点で死亡した場合のキャッシュ・フローの変化は扱っているが、将来世帯主が死亡した場合のキャッシュ・フローの変化は取り扱われていない。最適な生命保険購入額の決定についても議論されていない。

確定的なキャッシュ・フロー分析は分かりやすいが、これらの3つが分離されており、リスク資産運用や世帯主の死亡リスクをヘッジする生命保険のキャッシュ・フローを反映できない。多期間最適資産形成モデルから得られる情報を表現するには、従来のキャッシュ・フロー表では対応できず、確率的なキャッシュ・フロー分析の表現方法を工夫し、作成する必要がある。具体的には、世帯主が死亡すると、収入・支出などあらゆるキャッシュ・フローが変化したり、資産運用結果により金融資産も変化する(世帯主死亡の影響や金融資産額の変動を表す)図表を作成する。

4.1.3 日本国内のFPツールの問題点

日本国内においてもいくつかFPツールが開発されている。その一つである(株)エフピー研究所の「FP名人Ver.11(2009年度版)」を見ると、世帯、賃金、消費、教育、保険などFPのアドバイスに必要な設定を行い、将来の収支計算をとてきめ細かく分析ができる。しかし、著者の知る限りにおいてであるが、日本国内における分析ツールは「万が一」の場合も世帯主は「現時点」「試算年度末」で死亡する場合を想定しているし、資産運用も平均運用率での確実な運用を仮定しており、リスクを考慮していない確定シミュレーションを行うのみである。したがって、キャッシュ・フロー表も世帯主が生存している場合か世帯

主が死亡して存在しない場合のどちらかだけしか対応できないし、リスク資産への投資結果も期待値でしか記述できない。

そこで、本研究では簡易版ではあるが、研究成果を反映させた以下のような機能を持つFPツールを設計し、実装する。

- 最適な資産配分と保険購入・解約を同時に決定できる
- 「100-年齢」戦略やコンスタント・リバランス戦略により資産配分を所与としたもとの最適な保険購入・解約を決定できる
- リスクを考慮した確率シミュレーションができる
- 世帯主の死亡時点別キャッシュ・フロー表を作成できる
- 金融資産の確率分布を記述できる

実装した分析ツールのインターフェースはExcel(マイクロソフト)、最適化計算はNUOPT Ver.13(数理システム社の数理計画法パッケージ)、その他の計算はC++で構築している。現時点ではインターフェースや条件設定の柔軟性は不十分であるが(簡便で使い勝手に関しては市販ソフトウェアには劣るが)、市販ソフトウェアにはない機能を含めている。現在市販されているソフトウェアにこれらの機能を加えるか、本分析ツールの使い勝手をよくすることができれば、かなり強力な分析ツール(ソフトウェア)になると考えられる。

4.1.4 リスクの定量的な取り扱い方

本分析ツールでは確率的な最適化モデルとシミュレーションを取り扱う。そこでリスクの定量的な取り扱い方について、確定的に取り扱う場合と確率的に取り扱う場合の違いを整理する。また、最適化とシミュレーションの違いについても簡単に説明する。

(1) 確定的/確率的シミュレーション

想定している確定的なケースの一部を変更し、その影響を調べる方法は感度分析(確定シミュレーションによるケース分析)と言われる。例を挙げると、

(例1a) 3,000万円の生命保険に入っていて、世帯主が45歳で死亡した場合、将来のキャッシュ・フローはどうなるのか?

(例2a) 株式を金融資産の30%保有していて、株式期待収益率を1%で想定している。しかし、実際には-1%になった場合、将来の金融資産額はどうなるのか?

通常のFP分析では、例1aにおいては世帯主は死亡しない、もしくは現時点において死亡すると仮定して分析が行われる。それに対し、この例では

「45歳で死亡した」と仮定してそのキャッシュ・フローを計算する。例2aでは、株式収益率を変更しているが、あくまでも株式の変動は考慮していない。それに対して、確率シミュレーションは変動要因を表す確率変数が従う確率分布を想定し、モンテカルロ法を用いて計算される。上記例と似たような設定をモンテカルロ法による確率シミュレーションで分析するならば、以下のような設定をすることになる。

(例1b) 3,000万円の生命保険に入っているが、将来のキャッシュ・フローはどうなるか? 生命表の死亡率に基づいて世帯主の死亡事象を確率変数として記述する。

(例2b) 株式を金融資産の30%保有しているが、将来の金融資産額はどうか? 株式収益率を確率変数として平均1%, 標準偏差5%の正規分布に従うと想定する。

例1bの場合、死亡事象の有無(死亡時点)を確率的に取り扱う結果として、3,000万円の生命保険のキャッシュ・フローを確率的に取り扱うことができる。例2bの場合、株式収益率に影響を受ける金融資産額の変動を確率的に取り扱うことができる。

(2) 確率的な最適化/シミュレーション

最適化とシミュレーションは同じ構造の問題を取り扱うことができる。本研究の確率的最適化問題において決定変数として取り扱っているリスク資産への投資比率、生命保険の購入額、解約率を所与のパラメータとすれば、それは確率的シミュレーションを行うことになる。図4にそのプロセスの違いを示す。太線で囲まれた変数を決定変数とすれば最適化、パラメータとすればシミュレーションとなる。決定変数の最適解はモデルからの出力値として得られるため、図の都合上出力のみに記述したが、最適化モデルは決定変数と入力パラメータを用いて記述される。

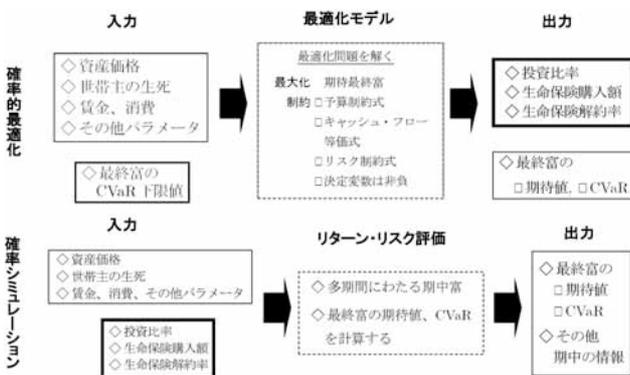


図4：確率的な最適化とシミュレーション

4.2 パラメータの設定

分析ツールでは、一部のパラメータに関しては各種資料のデータをもとに推定されたパラメータを用いる。そのまま用いるか、参照するかはパラメータによって異なる。各種保険料(社会保険料、健康保険料など)、税金(所得税、住民税、住宅関連の税金など)、遺族年金などに用いるパラメータはルールに基づいて設定するので、ここでは記述を省略する。

4.2.1 収入

(1) 賃金

勤労者を対象として賃金を推定する。就労者の年齢と職種によって異なるものと考え、厚生労働省「賃金構造基本統計調査(平成21年)」における産業大分類(16種類)の企業規模「1000人以上」、性別「男」、学歴「大学・大学院卒」の「年齢階級別きまって支給する現金給与額、所定内給与額及び年間賞与その他特別給与額」表を用いて、毎月の給与額、年間賞与をそれぞれ年齢の4次関数として賃金データを推定する²⁰。

世帯主、配偶者ともに賃金関数の形状を保ちつつ、現在の賃金水準に対して平行シフトすると仮定する。例えば、金融・保険業の賃金関数における30歳の賃金は640万円である。分析する世帯主が30歳で賃金が720万円だった場合、4次関数で得られた賃金をすべての年齢で1.125倍(=720/640)する。

(2) 退職金

退職金(死亡退職金)は賃金連動型とし、退職時の年齢(勤続年数)に対応した支給係数 δ_{m_0+t} を退職時(死亡時)の賃金 $\omega_{m_0+t}^{(i)}$ に掛けることによって求める。したがって、退職金 $e_t^{(i)}$ は(68)式

²⁰ 給与は勤続年数と関係があると考えられるが、年齢の関数のみでもかなり高い決定係数を得ることができたため、ここでは簡単のために年齢の関数のみで記述する。インフレ率を考慮して賃金水準はスライドさせるが、賃金関数は今後変化しないと仮定する。

また、女性は途中で仕事を辞めたり、男女雇用機会均等法が成立してから約25年しか経過していないので、45~50歳以上の賃金は年齢と関連性が見られない部分がある。そこで、女性の賃金関数にも男性と同じものを使っている。男女で賃金水準は異なるが、計画初期時点の賃金水準を入力パラメータとするので問題ないであろう。産業分類は産業大分類(16種類)、産業中分類(90種類)があり、各産業分類別、企業規模別(1000人以上、100~999人、10~99人)、学歴別(中卒、高卒、高専・短大卒、大学・大学院卒)に応じて、すべての賃金関数を推定して用意することが望ましいが、本研究では賃金関数の形状は同じと仮定して、そのうちの一部の組み合わせのみを示す。手間はかかるが、対応するのは難しくないため、今後対応する予定である。

で求められる。ここで、支給係数は(69)式のように m_d 歳では0であるが、年齢(時点)とともに上昇し、 $m_d + T_\delta$ 歳で上限値 δ_U を持つ一次関数を想定する。

$$e_t^{(i)} = \delta_{m_0+t} \omega_{m_0+t}^{(i)} \quad (68)$$

$$\delta_{m_0+t} = \min \left[\left(\frac{m_0 - m_d + t}{T_\delta} \right), 1 \right] \delta_U \quad (69)$$

例えば、現在35歳で、25歳以上で退職金を受け取れ始め、55歳になると給与の2倍もらえる場合には、 $m_0 = 35$, $m_d = 25$, $\delta_U = 2$, $T_\delta = 30$ とする。

4.2.2 消費支出

(1) 教育関係費

幼稚園から高校までの教育関係費は文部科学省「子どもの学習費調査(平成20年度)」における「学習費総額」をもとに計算する。学習費総額は公立・私立の違いや収入別に異なるデータが得られるので、想定する世帯の教育の希望や収入に合わせてそれらを学習費総額に反映する。幼稚園に入園するまでは公立幼稚園と同じ金額だけかかると想定し、教育関係費を20万円と仮定する。私立大学の費用は、文部科学省「平成21年度私立大学入学者に係る初年度学生納付金平均額(定員1人当たり)の調査結果について」のデータを用いて計算する。初年度は「授業料+入学料+施設設備費」、2年目以降は「授業料+施設設備費」とする。平成22年度における国立大学の費用は入学金が28.2万円、授業料が53.58万円である。また、授業料を除く家庭からの学生生活費支出分は日本学生支援機構「学生生活調査結果(平成20年度)」を用いて計算する²¹。

(2) その他の生活消費支出

住居、教育関係費を除くその他の支出 $c_t^{31(i)}$ と追加消費 $c_t^{32(i)}$ は退職金を除く可処分所得 $w_t^{-(i)}$ の関数として、(70)、(71)式で記述する²²。

$$c_t^{31(i)} = \alpha_1 w_t^{-(i)} + \beta_1 \quad (70)$$

$$c_t^{32(i)} = \alpha_2 \max \left[\left\{ w_t^{-(i)} - \left(\sum_{k=1}^2 C_{1,t}^{k(i)} + C_{2,t}^{(i)} \right) \right\}, 0 \right] + \beta_2 \quad (71)$$

²¹ 大学・昼間部のデータを用いて、「家庭からの給付」から「授業料」を除いた部分を家庭による負担分と考えて計算する。

²² T 時点の所得税と住民税は賃金と退職金の合計に対して計算されるため、退職金を除いた可処分所得を計算することはできない。按分する方法も考えられるが、簡単のため、 $w_T^{-(i)} = w_T^{(i)} - \delta_{m_0+T} e_T^{(i)}$ として計算する。勤続年数が長期になると退職所得は0となり課税されないため、この方法でも正確に計算される。 T 時点以外は $w_t^{-(i)} = w_t^{(i)}$ ($t = 1, \dots, T-1$) である。

$c_t^{31(i)}$ と $c_t^{32(i)}$ のパラメータの $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は家計の方針によって決定する²³。

(3) 非金融資産の購入支出(耐久消費支出)

非金融資産の購入支出 $C_{2,t}^{(i)}$ はその他の消費支出 $c_t^{31(i)}$ の関数として記述する²⁴。

$$C_{2,t}^{(i)} = \alpha_3 c_{1,t}^{31(i)} + \mathbf{1}_{\{t=t_e\}} (1 - \chi_1) \chi_2 \times \left\{ \chi_3 + (1 - \chi_3) \tau_{A,t_e}^{(i)} \right\} H_0 \quad (72)$$

第2項は、 t_e 時点で住宅を購入する場合に頭金 H_0 を追加することを表す。

4.2.3 生命保険

生保標準生命表(2007)の死亡保険用・男から得られた死亡率 $\lambda_{L,t}$ を利用し、生命保険の保険料や保険金を計算する。

4.3 モデルの実装

4.3.1 入力画面

市販のFPツールは使い勝手が良く、様々な条件を細かく入力することができる。一方、本分析ツールでは、一覧性と重要な項目のみの入力に焦点を当て、お客様の入力画面、分析者の入力画面を分けて、Excelのワークシートをそれぞれ1枚ずつ用意する。分析ツールは以下の部分で構成されている。

① お客様入力データ・ワークシート(図5)

- 世帯構成: 氏名, 続柄, 誕生日, 年齢
- 世帯主・配偶者の職業: 入社・定年の年齢, 年収
- 資産額: 金融資産, 非金融資産
- 子供の教育: 幼稚園~大学(公立・私立など)
- 住宅: 現在, 将来の予定(賃貸の場合は家賃, 購入する場合は購入時点, 住宅価格, 頭金, ローン期間)
- 既契約の生命保険・個人年金保険の諸条件: 保険料, 支払・受取期間など
- 火災保険・医療保険の保険料

²³ $c_t^{31(i)}$ のパラメータの α_1, β_1 を総務省「全国消費実態調査(平成21年)」の有業人員、年間収入階級別1世帯当たり1か月間の収入と支出(勤労者世帯)のデータを用いて推定すると、以下の関係式が得られた。

$$\text{有業者1人の世帯 } c_t^{31(i)} = 58.27 + 0.5966 w_t^{-(i)}, R^2 = 0.997$$

$$\text{有業者2人の世帯 } c_t^{31(i)} = 67.15 + 0.5147 w_t^{-(i)}, R^2 = 0.996$$

²⁴ 総務省「全国消費実態調査(平成21年)」の有業人員、年間収入階級別1世帯当たり1か月間の収入と支出(勤労者世帯)のデータを用いると、以下の関係式が得られた。

$$\text{有業者1人の世帯 } C_{2,t}^{(i)} = -14.58 + 0.2175 c_t^{31(i)}, R^2 = 0.974$$

$$\text{有業者2人の世帯 } C_{2,t}^{(i)} = -26.50 + 0.2453 c_t^{31(i)}, R^2 = 0.994$$



図5：お客様入力画面

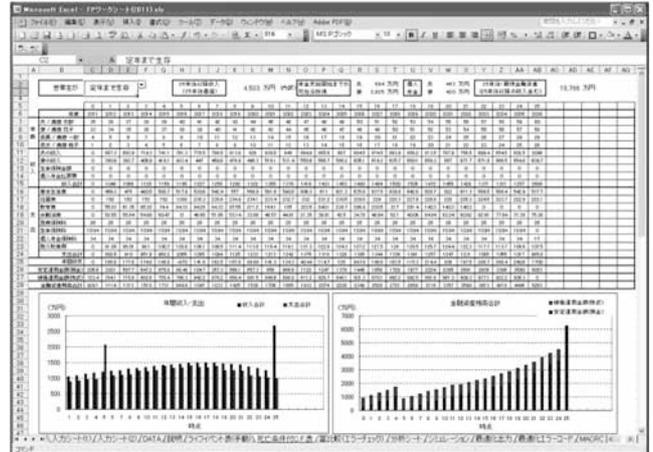


図7：キャッシュ・フロー表（世帯主・定年まで生存）



図6：分析者入力画面

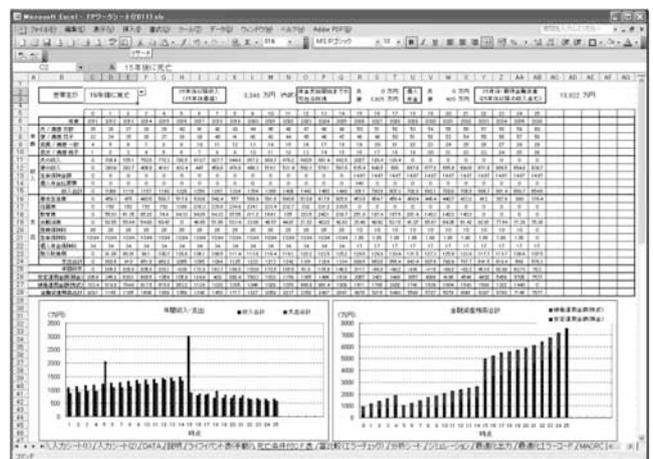


図8：キャッシュ・フロー表（世帯主・15年後に死亡）

② 分析者用入力データ・ワークシート（図6）

- 住宅条件: 住宅ローン金利，賃貸の場合の定年後想定年数と割引金利
 - 資産運用条件: 金利，リスク資産の期待収益率・標準偏差，インフレ率
 - 賃金条件: ボーナス，退職金
 - 消費水準に関する条件: 消費関数（基本生活費，耐久財費用，追加費用）
 - 新規の生命保険の条件: 予定利率，付加保険料比率
 - モデルのパラメータ: CVaR 確率水準，現金下限比率
 - 最適化・シミュレーション計算のパラメータ
- それぞれの入力画面の具体的な数値は5節で用いる数値である。これらの数値と世帯の設定の関係は5.1節で説明する。

4.3.2 出力画面（分析結果）

最適化およびシミュレーションの結果をまとめた分析画面として以下のものを用意している。

① キャッシュ・フロー表（CF表）：図7, 図8

世帯主が定年まで生存した場合だけでなく，死亡した場合のCF表を表示する。CF表の中の「年間収入・支出」「金融資産残高合計」をCF表の下に図示する。Excelの入力値の種類を設定した「リスト」から選択することによって，図表を自動的に変化させる。また，CF表の上には計画期間後（図の中では25年後）以降の収入（労働収入の可処分所得，個人年金）の計画時点における価値も示す。これらは最終富に含まれ，右上の「計画最終時点・期待金融資産」のセルの中に死亡時点別に計算された条件付き期待値が記される。

② 分析シート: 図9, 図10

- リスク資産の投資比率
- 生命保険の保険料
- 死亡時点別期待最終富
- 最終富の分布
- 死亡時点別の平均収入（可処分所得），平均消費，平均収支，平均累積収支

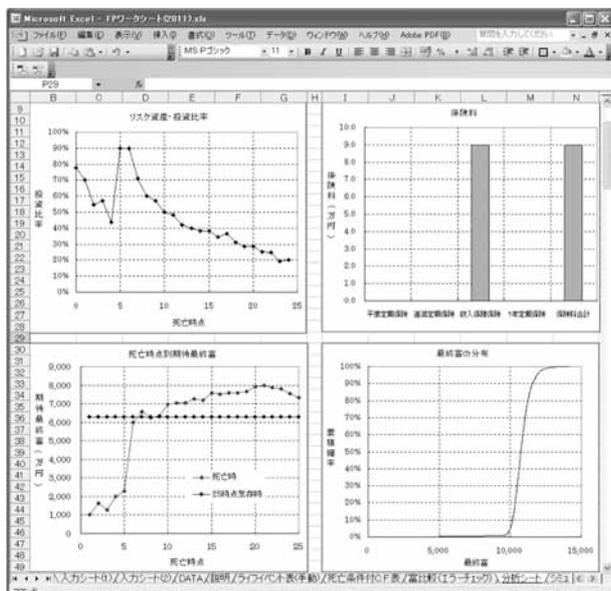


図9：分析シート（その1）

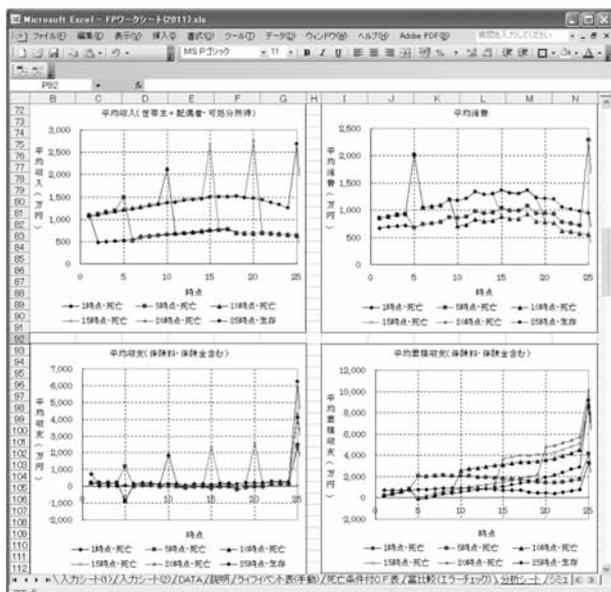


図10：分析シート（その2）

③ その他

4.3.3 最適化・シミュレーション計算

本分析ツールでは以下の3種類の計算が可能である。

- 最適資産配分・保険購入戦略モデル（オリジナル・モデル，集約モデル1，集約モデル2）
- 資産配分所与・最適保険購入戦略モデル
- シミュレーション（資産配分・保険購入所与）

分析ツールにおける最適化・シミュレーション計算の実行部分は，数理計画法ソフトウェア NUOPT（(株)数理システム），他に関連する計算はすべてC++を使っている。これらの計算は

Excel VBAマクロを使ってバッチ処理を実行している。

4.3.4 FP相談における具体的な使い方

最適化はシミュレーションに比べて理解しにくい可能性があり，計算にも時間がかかるので，シミュレーションで本分析ツールの出力結果に慣れてもらうことを勧める。所与の資産配分戦略（「100-年齢」戦略，もしくは現在の世帯のリスク資産配分におけるコンスタント・リバランス戦略），現在の保険契約のもとでシミュレーションを行うことが第一歩であろう。次に最適化を行う場合は計算時間がかからない「資産配分所与・最適保険購入戦略モデル」の結果を示し，最適化の考え方に慣れてもらうのもよいだろう。これら2種類の計算時間はほとんどかからないので，お客様の前で十分に様々な分析結果を示すことが可能である。

本研究のメインのモデルである「最適資産配分・保険購入戦略モデル」は集約モデルの利用を提案する。ただし，計算精度と計算時間のトレードオフを考慮して，期間数，パス数を検討する必要がある。詳細な計算時間は5節で議論する。

5. 数値分析

仮想的な世帯を想定し，4.3節で説明した分析ツールを用いて，分析を行う。

5.1 設定条件

5.1.1 世帯の設定

FP相談を行う世帯として，図5，図6に示す世帯を想定する。世帯主は35歳，配偶者は33歳とし，現在4歳と1歳の子供がいる。世帯主・配偶者ともに22歳で大学を卒業後すぐに働き始め，世帯主は金融・保険業，配偶者は製造業の会社に勤務し，定年の60歳まで働き続ける予定である。現在の年収はそれぞれ850万円（25年間累積，退職金込みで26,831万円），480万円（25年間累積で18,116万円）で，現在の金融資産は1,000万円，非金融資産は0である。子供の教育は幼稚園と小学校は公立だが，中学校から大学までは私立で，1人目は私立文系，2人目は私立理工学部と想定する。大学はともに自宅通学とする。

現在は賃貸マンション（12.5万円/月）に入居しているが，5年後には4,000万円のマンションを頭金800万円で購入する予定である。頭金800万円は住宅購入時すなわち世帯主40歳の時点（ $t_e = 5$ ）で支払うものとする。借入金額は3,200万円，借入期間は20年として，元利均等払いで住宅ローンを返済する予定である。ただし，5年後までに万

が一、世帯主が死亡した場合には住宅を購入せずに賃貸のままとする。

世帯主は3,000万円、配偶者は1,000万円の保険金を受け取れる平準定期保険に加入していて、ともに残り25年の保険料支払い・保険金受取期間があるものとする。平準保険料はそれぞれ年あたり10.38万円、1.96万円である。世帯主は保険の見直しを考えていて、全額解約してもよいと思っている。配偶者はそのまま保有する（解約しない）と考えている²⁵。

また、世帯主、配偶者ともに30歳から60歳まで保険料を支払い、60歳から10年間、毎年60万円の給付金を受け取ることができる個人年金保険に加入している。個人年金はそのまま保有し続けると考える。もしも解約したり、追加したければ、その分はあらかじめ考慮して入力する。

火災保険料は賃貸のときは毎年2万円、住宅を購入したらそのときに一括して15万円支払う。世帯主・配偶者ともに医療保険に加入していて、それぞれ毎年、16万円、10万円を支払う。

その他の設定は以下のように想定する（図6参照）。

- 5時点で住宅を購入するときのローン金利は3%とし、年間返済額を算出する。
- 住宅を購入しない場合には定年後も借家住まいとなるが、その家賃支払い年数は15年とする。その場合に支払う家賃は計画最終時点の価値に割り引く。割引率（金利）は5%とする。
- 住宅を購入した場合の償却率は0.03とする（固定資産税に関係する）。
- リスク資産は株式のみとし、余剰資金は株式か無リスク金利で運用する²⁶。無リスク金利は0.5%、株式の期待収益率は2.5%、収益率の標準偏差は10%、インフレ率は0%とする。
- ボーナスは固定とする²⁷。
- 世帯主・配偶者ともに定年後も年金支給開始まで（60歳～65歳の間）働くと仮定する。給与は60歳のときの0.4倍でボーナスはなしとする。
- 計画最終時点（世帯主の退職時点）以降、世帯主・配偶者が得る収入（キャッシュ・フロー）

の計画最終時点の価値に割り引く金利（割引率）は5%とする。

- 世帯主の退職金は退職時点給与の2倍、配偶者は1.5倍とする（相当するパラメータはそれぞれ $\delta_U = 2$, $\delta_U = 1.5$ ）。世帯主の会社は3年、配偶者の会社は2年経過すれば退職金がもらえ（22歳から働き始めているので、相当するパラメータはそれぞれ $m_d = 25$, $m_d = 24$ ）、それぞれ55歳になると退職金を満額もらえる（相当するパラメータはそれぞれ $T_\delta = 20$, $T_\delta = 22$ ）。
- 基本生活費（住居・教育関連費を除くその他の生活消費支出）は、可処分所得の0.4倍に40万円（固定費）を加えた金額を想定する。
- 耐久財費用（非金融資産の購入金額）は基本生活費の0.2倍とする。
- 可処分所得から支出額（生命保険料を除く）を差し引き、それがプラスであれば、その0.2倍を追加的に消費する。
- 世帯主が死亡した場合の消費水準は70%に抑える（ $\kappa = 0.7$ ）。
- 新規契約の生命保険の予定利率は1.5%、付加保険料比率はすべての保険に共通で50%とする。
- 新規契約の対象とする生命保険は3種類（平準定期保険、逓減定期保険、収入保障保険）とする。数値分析では1年定期保険は除く。
- 最終富には世帯主の退職金だけでなく、計画最終時点以降に得られる以下のキャッシュ・フローを計画最終時点に割り引いた価値も含まれる²⁸。
 - 世帯主・配偶者の個人年金（世帯主の個人年金は生存しているときのみ）
 - 世帯主が定年後、年金開始までに働いた場合に得られる可処分所得
 - 配偶者の定年までの残り2年間の可処分所得（退職金も含む）と定年後に年金開始までに働いた場合に得られる可処分所得
 - 世帯主が定年までに死亡した場合に計画最終時点から年金開始までに得られる遺族年金
 ただし、世帯主の定年後の支出は住宅費、教育費を除き、考慮していない。したがって、最終富は上記の将来キャッシュ・フローの計画最終時点価値も含むが、年金開始後の公的年金を除き、世帯主の定年後（計画最終時点以降）の支出をカバーするために保有しておくべき金融資産である。

²⁵ 図5のように世帯主が「見直し」を考える場合、最適化においては「1-残額倍率」が解約率の上限となり、シミュレーションにおいては「1-残額倍率」を解約すると設定することになる。配偶者が「見直し」を考える場合、世帯主のシミュレーションと同じく、「1-残額倍率」を解約すると設定することになる。

²⁶ 数値分析では簡単のため、無リスク金利は時点によらず一定、株式収益率は正規分布に従うと仮定する。

²⁷ 変動する場合には、変動率の標準偏差、株式収益率との相関係数を設定する。

²⁸ 計画最終時点には手元にあると想定される金額ではないことや後述のように消費支出を含んでいない点に注意が必要である。

- 最終富のCVaRの確率水準は80%とする。
- 3.1節のオリジナルモデル, 3.2節の集約モデルのときのCVaRの下限値は10,000万円, 現金(無リスク資産)の下限比率は10%とする。

5.1.2 その他の設定

(1) 計算条件

数値分析に用いる計算機はIBM ThinkPad T61, クロック周波数2.5GHz, メモリ3GBで, 数理計画ソフトウェアとしてNUOPT Ver.13.1.5を利用する。パス数は5,000本として, 問題を解く。

(2) 計算アルゴリズム

3.1節のオリジナルモデル, 3.2節の集約モデルでは, 枇々木 (2008) と同様に投資比率決定戦略で問題を解くために, 投資量関数のパラメータとして,

$$a_{jt}^{(i)} = \frac{W_t^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}}$$

関数であり, 投資量関数は非線形となるため, Hibiki (2006) の反復アルゴリズムを用いて解く。具体的には最初に線形計画問題となる投資量決定戦略モデル ($a_{jt}^{(i)} = 1$) の問題を解き, 得られた最適解を用いて計算した富 $W_t^{(i)*}$ を投資比率決定戦略を表す投資量関数に代入し, 線形計画問題として問題を解く。それを反復し, 収束するまで問題を解く。本分析では3回で収束したと判断し, 計算を終了する (図19)。

(3) 集約モデルの期間設定 (5.2節・分析3)

$K = 3 \sim 24$ に期間数を短縮した集約モデルを解き, オリジナルモデル ($K = 25$ に相当) と比較する。ただし, 住宅購入時点は5時点目であるので, 枇々木 (2008) と本研究におけるオリジナルモデルの結果より, 4時点と5時点に決定変数を割り当てる。これは住宅購入時点では頭金を確実に支払うため, 住宅購入時点とその1時点前ではリスク資産への配分比率が大きく異なる可能性があり, 計算精度に大きな影響を与えるからである。集約モデルの期間数に対するオリジナルモデルの時点の対応表を表2に示す。

たとえば, $K = 5$ の場合, オリジナルモデルの0, 4, 5, 8, 16時点が決定変数を割り当てる時点となり, 集約モデルの0~4時点となる ($t_0 = 0, t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 8, t_4 = 16$)。ただし, 集約モデルにおいてもオリジナルモデルの各時点でリバランスを行うことになる²⁹。

表2: 集約モデルの期間数に対するオリジナルモデルの時点の対応表

		オリジナルモデルの時点(t)																								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
集約モデルの期間数 K	3	○				○	○																			
	4	○				○	○												○							
	5	○				○	○			○									○							
	6	○				○	○			○					○							○				
	7	○	○			○	○			○					○							○				
	8	○	○			○	○			○				○					○			○				
	9	○	○			○	○	○		○				○					○			○				
	10	○	○			○	○	○	○	○			○		○				○			○				
	11	○	○	○		○	○	○	○	○			○		○				○			○				
	12	○	○	○		○	○	○	○	○			○		○				○			○				○
	13	○	○	○		○	○	○	○	○			○		○				○			○				○
	14	○	○	○		○	○	○	○	○			○		○				○			○				○
	15	○	○	○	○		○	○	○	○			○		○				○			○				○
	16	○	○	○	○	○		○	○	○			○		○				○	○		○				○
	17	○	○	○	○	○	○		○	○			○		○				○	○		○				○
	18	○	○	○	○	○	○	○		○			○		○				○	○		○				○
	19	○	○	○	○	○	○	○	○				○		○				○	○		○				○
	20	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○
	21	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○
	22	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○
	23	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○
	24	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○
	25	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○				○	○		○				○

5.2 数値分析の概要

5.1節の設定に基づき, 以下に示す3種類の数値分析を行う。分析1と分析3の設定はそのまま, 分析2は分析1の設定の一部を変更して行う。

分析1: 基本分析

4.3.4項に示したFP相談のプロセスを意識して, 以下に示す(1)~(3)のモデルに対して分析を行う。ただし, 比較のため, (3)の最適資産配分・保険購入戦略モデルは集約モデルではなく, オリジナルモデルの結果を示す。また, 期待最終富の制約式は(41)式を用いる。

- (1) シミュレーション (現状分析)
- (2) 資産配分 (投資戦略) を所与とするモデル (3.3節:以降, 「保険最適化」と呼ぶ)
- (3) 最適資産配分・保険購入戦略モデル (3.1節:以降, 「資産・保険最適化」と呼ぶ)

分析2: 配偶者が専業主婦の世帯を想定した分析

世帯主死亡後の年収は150万円とする。分析1の設定に比べて収入が減少するので消費関数も変更する。さらに, 子供が大きくなったらパートで働き始め, 10時点から100万円の年収がある場合も考える。分析1と同様に資産・保険最適化モデルはオリジナルモデルを用いる。

分析3: 集約モデルとオリジナルモデルの比較分析

表2で示した期間設定で比較を行う。

²⁹ 集約モデル1では意思決定時点間と同じ意思決定 (投資比率) を継続する (コンスタント・リバランスを行う) のに対し, 集約モデル2では2つの時点の線形補間した投資比率でリバランスを行う。ただし, 集約モデル2の t_{K-1} 時点以降は, 補助変数として設定された最終時点 ($T = 25$) の決定変数と線形補間する。

5.3 分析結果

5.3.1 分析1：基本分析

最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解を表3，リスク資産の投資比率を図11，最終富分布を図12に示す。シミュレーションと保険最適化モデルでは「100-年齢」戦略を用いている。保険最適化ではCVaR最大化を目的関数とし，資産・保険最適化ではCVaRの下限を10,000万円と設定して期待最終富を最大化する。

表3：最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解

	(単位: 万円)		
	シミュレーション (現状分析)	保険 最適化	資産・保険 最適化
期待最終富	10,974	10,901	10,790
CVaR(80%)	9,818	9,936	10,000
平準定期・保険金0	0	0	
通減定期・1時点保険金	0	6,196	0
収入保障・年給付金	0	0	223
既契約・保険解約率	0%	100%	100%

図11の資産・保険最適化におけるリスク投資の最適投資比率を見ると，住宅購入時点（5時点）の前までは減少し，5時点において一時的に上昇するが，その後再度減少する。この現象は枇々木（2008）でも見られており，集約モデルにおいて住宅購入時点とその1時点前を決定変数として取り扱う必要があることを裏付けている。「100-年齢」戦略も最適投資比率と似たような戦略となっていることも分かる。一方，表3を見ると生命保険の最適解は，保険最適化では「平準定期保険（保険金3,000万円）の全額解約」「通減定期保険の購入（1時点の保険金は6,196万円で，毎年248万円ずつ通減し，25時点で0になる）」，資産・保険最適化では「平準定期保険の全額解約」「収入保障保険の購入（年あたり228万円の給付金）」となる。

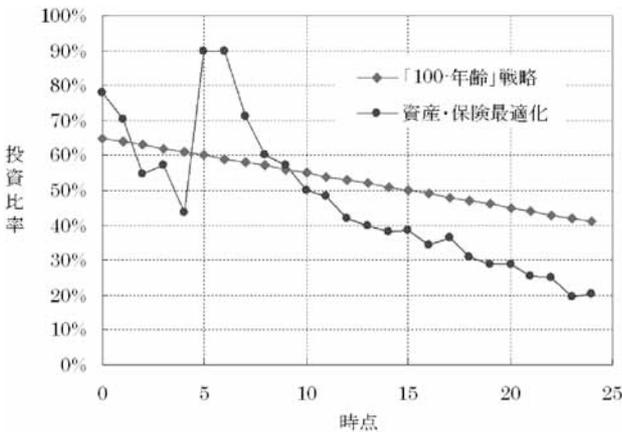


図11：リスク資産の投資比率

図12の最終富の分布と期待値・CVaRを見ると，シミュレーション，保険最適化，資産・保険最適化の順で分布の幅が狭くなり，リスクコントロールができていくことが分かる。保険最適化ではCVaR最大化を目的関数としているので，CVaRを大きくすることによってこれ以上は分布を狭くできないが，資産・保険最適化では可能である。CVaRを大きくすると期待最終富は小さくなる。リスクとリターンはトレードオフの関係にある。

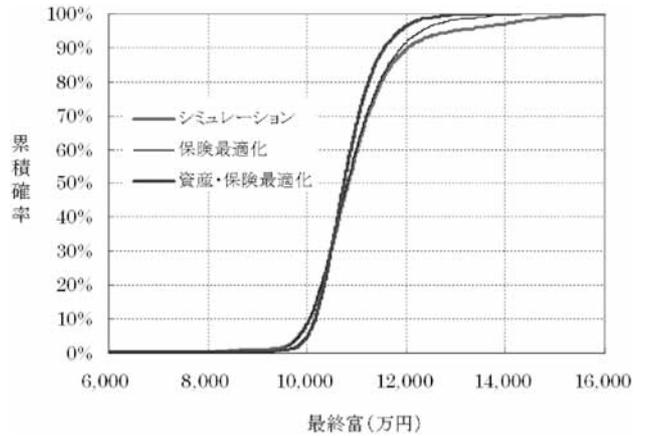


図12：最終富分布

図13, 図14に死亡時点別最終富の期待値と標準偏差を示す。世帯主が死亡すると最終富に与える影響は極めて大きい。図13を見ると死亡時点が早いほど世帯主が得る累積収入が減るため，平均的に低くなる。ただし，世帯主が最終時点まで生存する場合には保険金が手に入らないため，ある時点（図13の場合には6～9時点）以降に死亡した場合に比べて死亡時点別期待最終富は小さくなる。資産・保険最適化を行う場合，保険最適化に比べて，死亡時点別期待最終富は全体的に低くなる。しかし，図14を見ても分かるように，死亡時点別最終富の変動は小さくなる。

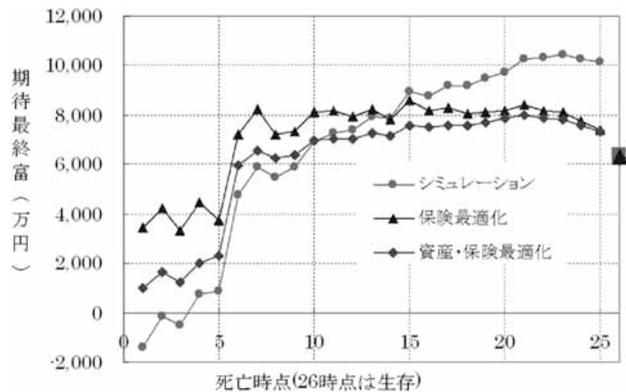


図13：死亡時点別最終富の期待値

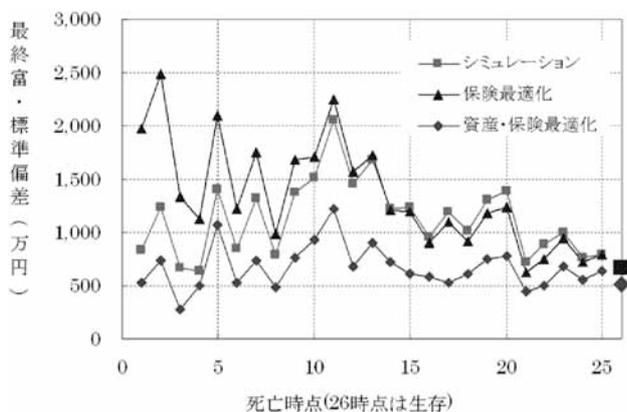


図14：死亡時点別最終富の標準偏差

5.3.2 分析2：専業主婦の世帯を想定した分析

配偶者の基本設定を変更し、配偶者が専業主婦の世帯を想定する。ただし、世帯主が死亡した場合には働き始めることとして、そのときの年収は150万円とする。最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解を表4に示す。

表4：最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解

	(単位: 万円)				
	シミュレーション (現状分析)			保険最適化	資産・保険最適化
消費係数倍率	1倍	0.9倍	0.8倍	0.8倍	0.8倍
期待最終富	1,946	3,308	4,614	4,532	4,440
CVaR(80%)	1,219	2,661	3,877	4,011	4,050
平準定期・保険金0	0	0	0	0	0
逡減定期・1時点保険金	0	0	0	6,602	0
収入保障・年給付金	0	0	0	0	312
既契約・保険解約率	0%	0%	0%	100%	100%
世帯主 最終期待富	1,838	3,204	4,514	4,473	4,367
生存時 (定年後収入除く)	(105)	(1,471)	(2,780)	(2,740)	(2,634)

※消費係数倍率は「分析1」の消費係数に対する倍率

表4を見ると分かるように分析1と同じ消費レベルだと最終富の期待値・CVaRともかなり小さい。紙面の都合上結果は省略するが、世帯主が計画最終時点で生存していた場合の結果を見ると、住宅購入後に期中の金融資産は急激に下がり、9時点以降ずっとマイナスが続くが、定年時点での退職金によりプラスになり、期待金融資産額は105万円となる。定年後収入の価値が1,733万円となり、期待最終富は1,838万円となる。これは分析1に比べて大幅に世帯の総収入が減少するからであり、共働きのときのような(消費)生活をすると共働きに比べて十分な老後資金を貯めることはできない。そこで、消費よりも資産形成を優先

し、消費に関する係数を0.8倍としよう³⁰。リスク資産の投資比率と死亡時点別期待最終富を図15、図16に示す。

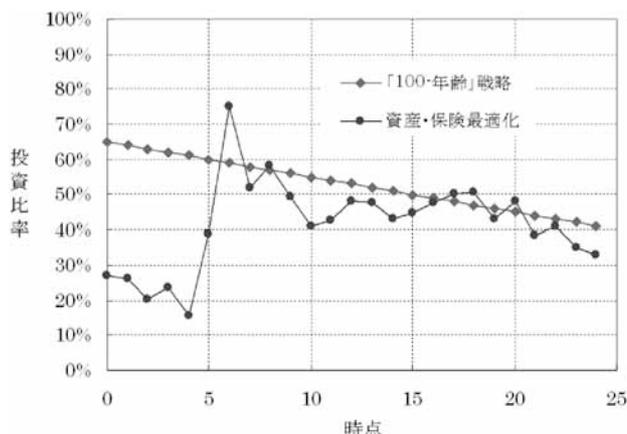


図15：リスク資産の投資比率

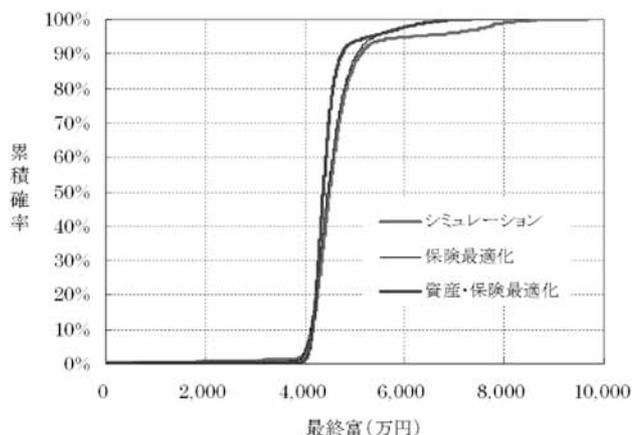


図16：死亡時点別期待最終富

配偶者が専業主婦であるため、消費を抑えても最終富は共働き(分析1)に比べて4割程度減少するとともに、生命保険の保険金額も高くなる。水準は異なるが、資産・保険最適化におけるリスク資産の最適投資比率や死亡時点別期待最終富の特徴は分析1と同じである。ただし、世帯主が早く死亡すると期待最終富の水準は著しく小さくなる(シミュレーション(現状分析)の場合、5時点までに死亡するとマイナスである)。

ところで、4.3.4項でも述べたように、FP相談のプロセスの最初はシミュレーションによる現状分析を行う。その段階で最終富の期待値・CVaRが低い場合には、表4にあるように最初に消費を

³⁰ 世帯主のみが働くので、世帯全体の可処分所得は下がる。そのため、消費金額は共働きの場合の消費金額の0.8倍よりもさらに小さくなる。

減らすなどの生活改善を提案した上で最適化によるリスクコントロールが有効である。この例のように消費倍率を0.8倍にしても、最終富の水準は共働きよりも低くなるため、子供が大きくなったらパートで働き始めるという選択もアドバイスできるだろう。例えば、配偶者が42歳になったら、2番目の子ども（長女）が小学校高学年（4年生、10歳）になるので、60歳までパートで働き始めると仮定しよう。ただし、所得税の非課税基準と配偶者控除の基準である103万円を考慮して、年収は100万円とする。また、この場合でも世帯主が死亡した場合にはすぐに年収150万円の仕事に就くとする（10時点以降の場合には年収100万円の仕事から150万円の仕事に切り替える）。

最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解を表5、リスク資産の投資比率を図17、死亡時点別期待最終富を図18に示す。

表5：最終富の期待値・CVaRと資産・保険の最適解

	(単位: 万円)		
	シミュレーション (現状分析)	保険 最適化	資産・保険 最適化
期待最終富	5,736	5,623	5,645
CVaR(80%)	4,858	5,045	5,050
平準定期・保険金	0	0	0
逓減定期・1時点保険金	0	7,659	0
収入保障・年給付金	0	19	316
既契約・保険解約率	0%	100%	100%
世帯主 最終期待富	5,692	5,571	5,623
生存時 (定年後収入除く)	(3,909)	(3,787)	(3,840)

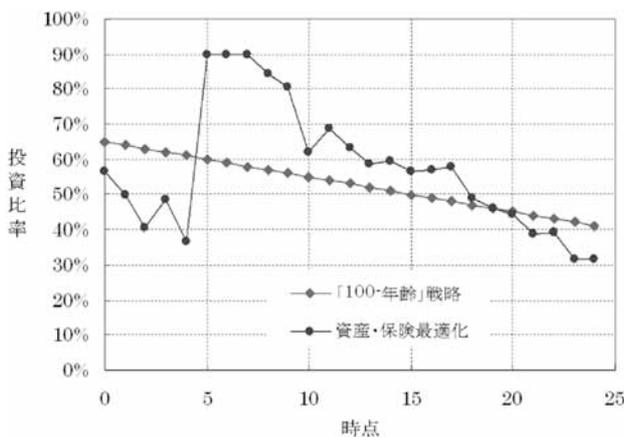


図17：リスク資産の投資比率

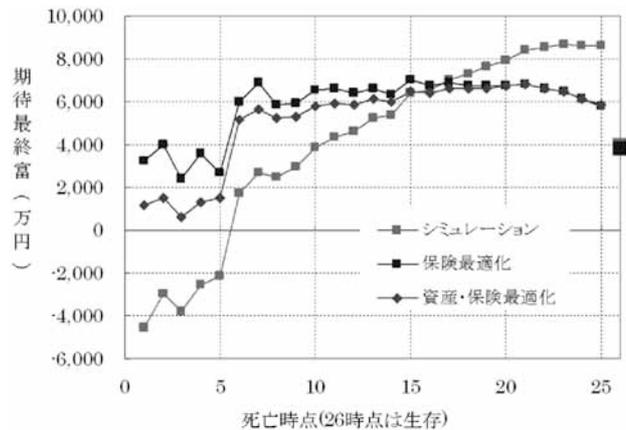


図18：死亡時点別期待最終富

表5を見ると、表4に比べて期待最終富を1,100~1,200万円増やすことができる。これは配偶者が18年間パートタイムで働き収入が増加する効果である。可処分所得が増える分、消費支出も約1,000万円増え、生活の質も上昇することができる。CVaRの水準が異なるので、図17のリスク資産の投資比率の水準は比較できないが、特徴は同じである。死亡時点別期待最終富も時点によって異なるが全体的には期待最終富の水準は一部を除き、ほぼ同じか上昇する。

5.3.3 分析3：集約モデルとオリジナルモデルの比較分析

投資比率戦略のシミュレーション型モデルで最適解を得るためには、反復計算が必要である。反復を繰り返すことによって収束精度は高まるが、一方で多くの計算時間を要することになり、反復回数と計算時間はトレードオフ関係にある。そこで、集約モデルでも許容できる収束精度が得られる反復回数を調べるために、図19に反復回数と目的関数値（期待最終富）の関係を示す。横軸は時点数（期間数） K である。'U'は投資量決定戦略モデルで問題を解いたときの目的関数値、'R1'は投資比率決定戦略モデルの1回目の反復を表す（同様に、'R2'、'R3'はそれぞれ2回目、3回目の反復を表す）。投資比率戦略決定モデルを3回反復を繰り返すとほぼ目的関数値は同じ値を取ることが分かる。

目的関数値は期間数の増加とともに $K=6$ までは徐々に上昇し、その後徐々に収束し始め、集約モデルの種類によって異なるが、 $K=17$ ではオリジナルモデルの目的関数値とほぼ同じ値を取る。

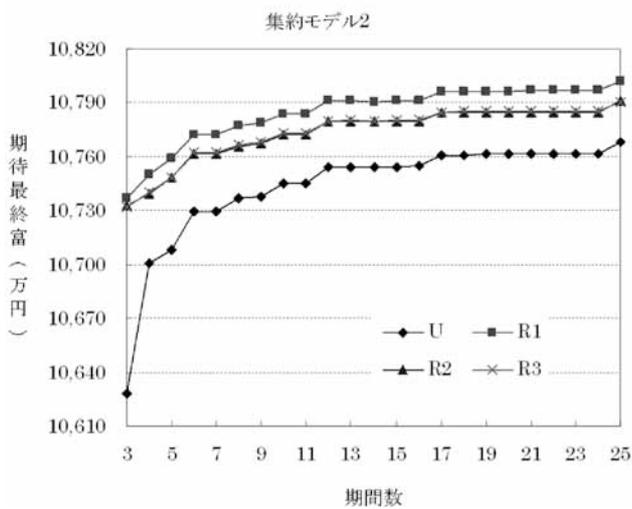
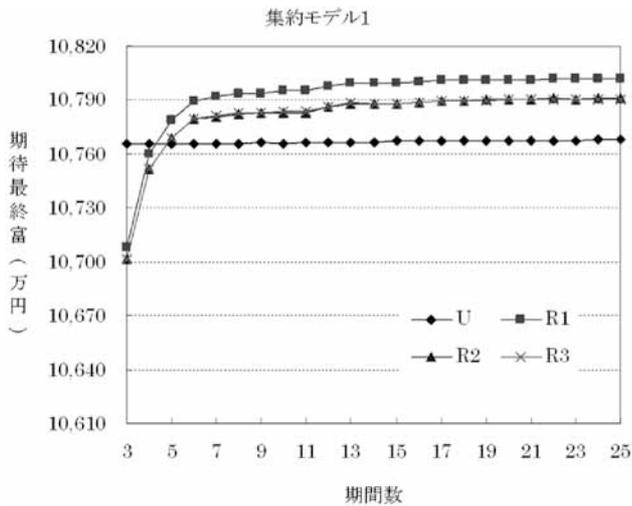


図19：目的関数値

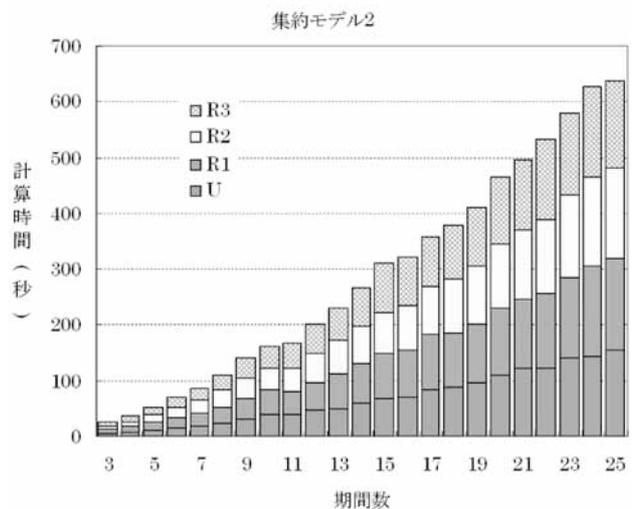
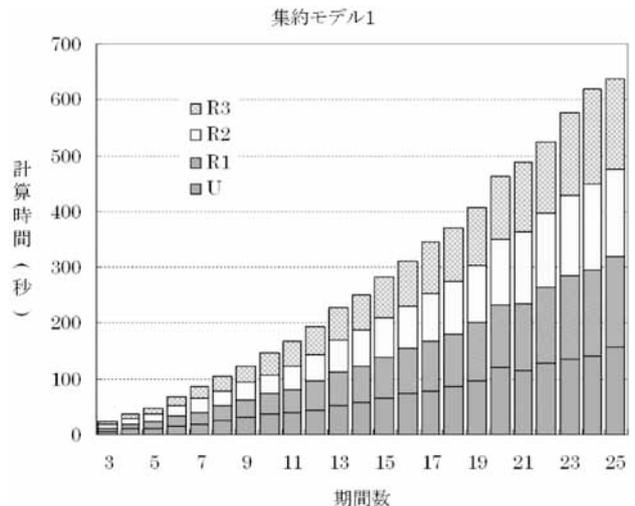


図20：期間数と計算時間の関係

図20に期間数と3回目の反復までの累積計算時間の関係を示す。

期間数が増加するにつれて、計算時間が指数的に増加するが、集約モデルによる違いはあまり見られない。一方、集約モデルによる計算時間の削減効果は大きく、 $K=5$ では約8%、 $K=10$ では約25%、 $K=15$ では約49%、目的関数値がほぼオリジナルモデルと同じになる $K=17$ では、オリジナルモデルの約56%の時間で計算することができる。

ところで、図19を見ても分かるように、反復回数2回目と3回目はほとんど同じ目的関数値である。紙面の都合上省略するが、資産配分もほぼ同じである。そのため、計算時間の短縮を図るためには反復回数は2回でよいだろう。その場合、集約モデル2の $K=17$ では270秒で最適解（近似解）を得ることができる³¹。

図21に6種類の異なる期間数（ $K=3, 5, 10, 15, 20, 25$ ）に対する各時点の最適投資比率を示す。

集約モデル1では設定する期間数による影響は大きいですが、それでも $K=10$ でオリジナルモデルの最適解と同じ傾向を示すことができる。しかし、集約モデル2の方が集約モデル1に比べて滑らかに記述できており、 $K=5$ でも同様の傾向を持つ最適解を得ることができる。集約モデル2は決定変数の加重平均という考え方をを用いたために、特に少ない期間数のときに効果的であることが分かる。ここで示した数値分析例は一つの例であり、さらなる分析が必要である。

³¹ 最適化計算に使うデータ生成も含めると、約400秒（6分40秒）の計算時間を要する。実際の利用に向けての最適化計算以外の部分のプログラムの効率化は今後の課題としたい。

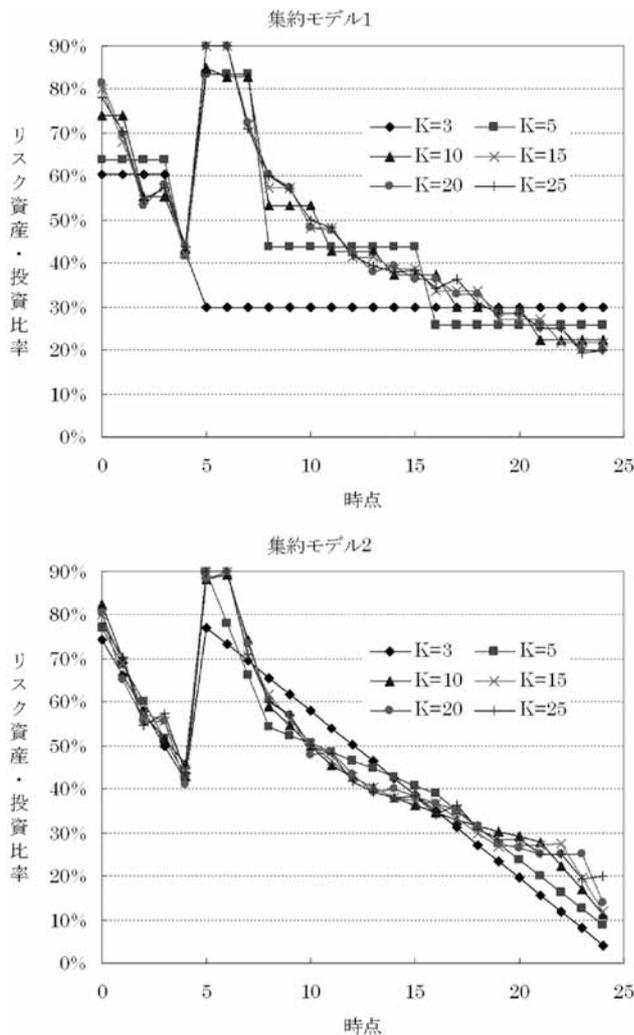


図21：異なる期間数に対する各時点の最適投資比率

6. おわりに

本研究では、枇々木 (2008) の研究成果をもとにしつつ、より現実の世帯の設定に対応するようにモデルの改善を行った。実務での利用では計算時間の短縮も重要であり、そのためのモデル化の方法として集約モデルを2種類提案した。一般に期間短縮を行う場合、集約モデル1のタイプを用いるが、決定変数の加重平均という考え方をを用いた集約モデル2の方が滑らかに最適解を記述することができ、その有用性を示すことができた。計算時間・計算精度を比較し、集約モデルでも十分に対応できることを示した。最適化機能にシミュレーション機能を加えて実装したソフトウェアを設計し、Excelをインターフェースとして用いる分析ツールを開発した。

著者は、枇々木・小守林 (2007) 中の今後の抱負で『最適資産運用モデルを簡易に計算できるソフトウェアを開発して、ファイナンシャル・プランナーの方々に活用していただければ』と述べた。現在のバージョンはプロトタイプであり、

まだ使い勝手などの点で一般のファイナンシャル・プランナーの方々に使ってもらえる商品には遠いが、それに向かっての一つの答えを出せたと考えている。今後は試験的にでもファイナンシャル・プランナーの方々に協力してもらいながら、完成度を高めることが今後の課題である。

現在のモデルおよびソフトウェアは世帯主の退職時点までの資産形成に限られているが、今後はリタイアメント・プランニングのモデルについても枇々木・西岡 (2010) をベースにしてモデルの拡張を行い、本研究で開発したソフトウェアと同様に実装し、融合を目指している。

謝辞

本研究は科研費・基盤研究 (C) (21510158) の助成を受けたものである。

参考文献

- Berger, A.J. and Mulvey, J.M. (1998), "The Home Account Advisor™, Asset and Liability Management for Individual Investors", In "Worldwide Asset and Liability Modeling", edited by W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (1998), Cambridge University Press, pp.634-665.
- Campbell, J.Y. (2006), "Household Finance", *The Journal of Finance*, Vol.61, No.4, pp.1553-1604.
- キャンベル, ビセイラ著, 木島正明監訳, 野村証券金融経済研究所訳 (2005), 『戦略的アセットアロケーション』, 東洋経済新報社.
- Chen, P., Ibbotson, R.G., Milevsky, M. and Zhu, X. (2006), "Human Capital, Asset Allocation, and Life Insurance", *Financial Analysts Journal*, Vol.62, No.1, pp.97-109. (元利大輔訳 (2006), 「人的資本に基づいた資産配分と生命保険の意思決定」『証券アナリストジャーナル』44(8): 26-41.)
- Consiglio, A., Cocco, F. and Zenios, S.A. (2004), "www.Personal Asset Allocation", *Interfaces*, Vol.34, No.4, pp.287-302.
- Consiglio, A., Cocco, F. and Zenios, S.A. (2007), "Scenario Optimization Asset and Liability Modelling for Individual Investors", *Annals of Operations Research*, Vol.152, pp.167-191.
- Gaivoronski, A. and de Lange, P. (2000), "An Asset Liability Management Model for Casualty Insurers: Complexity Reduction vs. Parameterized Decision Rules", *Annals of Operations Research*, Vol.99, pp.227-250.
- 枇々木規雄 (2001), 「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 44(2): 169-193.

- Hibiki, N. (2006), "Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation", *Journal of Banking and Finance*, Vol.30, No.2, pp.365-390.
- Hibiki, N. (2007), "Multi-period Optimization Model for a Household, and Optimal Insurance Design", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.50, No.4, pp.463-487.
- 枇々木規雄 (2008), 「家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル」『ファイナンシャル・プランニング研究』8: 32-42.
- 枇々木規雄, 小守林克哉 (2006), 「多期間最適資産形成モデルー実践的なモデルへの拡張ー」『日本保険・年金リスク学会誌』2(1): 3-31.
- 枇々木規雄, 小守林克哉 (2007), 「日本FP学会賞・受賞者に聞くー②」『日本ファイナンシャル・プランナーズ協会FPジャーナル』9(83): 30-31.
- 枇々木規雄, 小守林克哉, 豊田暢子 (2005), 「多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル」『日本保険・年金リスク学会誌』1(1): 45-68.
- 枇々木規雄, 西岡史恵 (2010), 「主観的健康感を考慮したリタイアメント・プランニング・モデル」『ファイナンシャル・プランニング研究』10: 91-101.
- Höcht, S., Hwa, N.K., Rösch, C.G. and Zagst, R. (2008), "Asset Liability Management in Financial Planning", *The Journal of Wealth Management*, Vol.11, No.2, pp.29-46.
- Huang, H., Milevsky, M.A. and Wang, J. (2008), "Portfolio Choice and Life Insurance: The CRRA Case", *The Journal of Risk and Insurance*, Vol.75, No.4, pp.847-872.
- 角田康夫 (2007), 「個人のライフサイクルと資産配分」三菱UFJ信託銀行, 調査情報, No.311
<http://www.tr.mufg.jp/houjin/jutaku/chousa.html>
- きんざいファイナンシャルプランナーズセンター (2010), 『FP技能検定教本1級 (2010年度版)』, きんざい.
- Klaassen, P. (1998), "Financial Asset-pricing Theory and Stochastic Programming Models for Asset / Liability Management", *Management Science*, Vol.44, No.1, pp.31-48.
- Kotlikoff, L.J. (2008), "Economics' Approach to Financial Planning", *Journal of Financial Planning*, Vol.21, No.3, pp.42-52.
- 厚生労働省 (2009), 「賃金構造基本統計調査 (平成21年)」<http://www.e-stat.go.jp/SG1/estat/NewList.do?tid=000001011429>
- Medova, E.A., Murphy, J.K., Owen, A.P. and Rehman, K. (2008), "Individual Asset Liability Management", *Quantitative Finance*, Vol.8, No.6, pp.547-560.
- 文部科学省 (2008), 「こどもの学習費調査 (平成20年)」.<http://www.e-stat.go.jp/SG1/estat/NewList.do?tid=000001012023>
- 文部科学省 (2009), 「平成21年度私立大学入学者に係る初年度学生納付金平均額 (定員1人当たり) の調査結果について」.
http://www.mext.go.jp/a_menu/koutou/shinkou/07021403/1293987.htm
- 長島亮 (2006), 「米国におけるファナンシャルプランニングツールの発展」『資本市場クォーターリー』10(2): 189-199.
- 社団法人日本アクチュアリー会 (2007), 「生保標準生命表 (2007)」.<http://www.actuaries.jp/info/seimeihyo2007.html>
- 日本FP協会, 貝塚啓明監修 (2010), 『FPテキスト1 パーソナルファイナンス～ライフプランニング・リタイアメントプランニング～ (2010年度版)』.
- 日本FP協会, 森平爽一郎監修 (2010), 『FPテキスト2 金融資産運用設計 (2010年度版)』.
- 日本FP協会, 宇野典明監修 (2010), 『FPテキスト4 リスクマネジメント (2010年度版)』.
- 日本学生支援機構 (2010), 「学生生活調査結果 (平成20年度)」, 2010年3月.
http://www.jasso.go.jp/statistics/gakusei_chosa/data08.html
- 総務省 (2009), 「全国消費実態調査 (平成21年)」
<http://www.e-stat.go.jp/SG1/estat/NewList.do?tid=000001037021>