

# 論 文

## 不確実性下での資産運用

－ロバストポートフォリオ最適化の活用－

A Robust Optimization Approach to Asset Management under Uncertainty

三菱UFJトラスト投資工学研究所，中央大学工学部 山本 零/Rei YAMAMOTO<sup>1</sup>  
中央大学大学院理工学研究科経営システム工学専攻 石橋 拓弥/Takuya ISHIBASHI

### キーワード (Key Words)

資産運用 (Asset Management)，不確実性 (Uncertainty)，平均・分散モデル (Mean-Variance Model)，ロバストポートフォリオ最適化 (Robust Portfolio Optimization)

### 〈要 約〉

近年の不確実性が高まっている市場環境では，資産運用を行うことが難しいとされている．このような状況での有効な資産運用方法としてロバストポートフォリオ最適化が近年注目されている．本論文では，ロバストポートフォリオ最適化の紹介を行い，市場データを用いて運用シミュレーションを行うことでその有効性を検証した．

### 1 はじめに

近年の金融危機の中，資産運用は特に難しい環境であるといわれている．例えば2007年以降，金融市場にはサブプライム問題の顕在化やリーマンショック，ドバイショックなど次々と問題が発生しており，市場の変動性が大きく高まっている．具体的に国内株式市場を表す指標の1つであるTOPIXは，2003年から2006年まで毎年プラスの成長を遂げてきたが，2007年は約11%，2008年は約50%のマイナスとなっている．同様に米国株式市場の代表的な株式指数であるS&P500インデックスは2003年から2007年までプラスの成長であっ

たが，2008年は40%程度の大きなマイナスとなってしまった (図1左図)．

このような変動性の大きな市場環境は，資産運用を行ううえで安定的な収益を得ることが困難であるといえる．例えば，資産運用の代表例として約120兆円の公的年金の積立金運用を行っている年金積立金管理運用独立行政法人 (以下，GPIF) の運用状況を見てみると，2003年から2006年までは安定的な収益を獲得してきたが，2007年，2008年と大きな損失を被っていることがわかる (図1右図)．

このような環境での有効な運用方法の1つとし

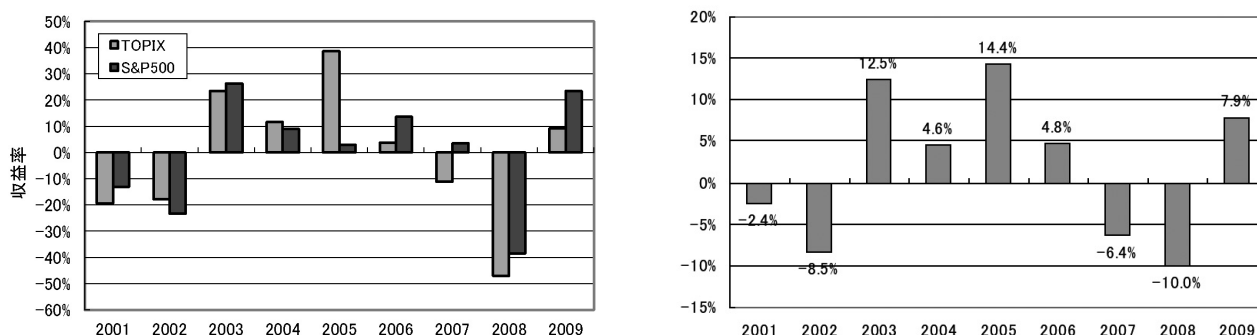


図1 内外株式市場指数の収益率とGPIFの運用成績 (年度)

<sup>1</sup> 本論文の内容は，著者個人に属するものであり，所属する会社の公式見解を示すものではありません．また，本論文に含まれる誤りは全て著者の責に帰するものです．

て、数理計画法を用いた資産運用が考えられる。数理計画法を用いた資産運用は、1952年にMarkowitz (1952) によって平均・分散モデルとして提案されたものであり、運用するポートフォリオのリターンとリスク（変動性）を考慮して、資産運用を行うものである。このモデルは近年まで様々な研究が行われており、個人投資家のための資産運用としても、今野・白川・Wijayanayake (2001)、山本 (2009) が扱っている。

しかしながら、数理計画法を用いた資産運用を行ったとしても、近年の市場環境では安定的な運用を行うことが難しい。その一例として、前述のGPIFも平均・分散モデルを用いた運用を行っており、それにもかかわらず近年大きな損失を被ってしまった。この原因として考えられるのは、期待収益率、リスク（共分散）の推定が困難なことである。数理計画法を用いた資産運用モデルを使用する場合、投資対象とする各資産の期待収益率とリスクを事前に推定し、その情報を元にポートフォリオ全体のリターンとリスクのバランスの取れた資産配分を決定する。ここで各資産の期待収益率とリスクの推定が間違っただけであれば、出力される資産配分も間違っただけとなる。期待収益率やリスクの推定には、資産の過去の収益率情報を用いて推定することが多いが、近年の変動性や不確実性の高い市場環境ではこのような推定が機能せず、予想と反し大きな損失が実現してしまう可能性も高い。

このようなインプット情報の不確実性を取り扱う方法として、本論文ではロバスト最適化に注目する<sup>2</sup>。ロバスト最適化は、Ben-Tal and Nemirovski (1998) によって提案された手法であり、最適化問題に入力する期待収益率やリスクの情報に対し不確実性集合を与え、それらの情報を取りうる最悪ケースを想定して最適な資産配分を算出するものである。

上記のように数理計画法を用いた資産運用理論に関しては、入力情報として期待収益率やリスクという不確実性を含むデータが多いため、ロバスト最適化の資産運用への利用に関する研究も数多く行われている。ただし、ほとんどの研究がモデルの提案に関するものであり、実際に資産運用を行う立場から実証分析を行って有効性を検証している研究はあまり存在しない。

その中でも近年ロバスト最適化の有効性を実証した研究として山本・鴻丸 (2010) が挙げられる。この研究では公的年金の積立金運用に焦点を当

て、GPIFの公表している期待収益率、リスクの情報を用いてロバスト最適化でポートフォリオを構築しており、想定よりも低い収益率が実現した状況において積立不足を抑制できることを示している。公的年金の積立金運用は、年金負債という長期のキャッシュ・アウトフローに備えるために安定的な資産運用が望まれる。そして非常に大きい運用金額のため、ポートフォリオの動的な組替え（リバランス）を考えず、毎期はじめに決定したポートフォリオに戻すコンスタントリバランスを前提としており、長期的に安定する1つのポートフォリオ（基本ポートフォリオ）の決定を目的としている。

個人投資家の場合、資産運用は長期のライフプランニングにおけるキャッシュ・アウトフローに備えるための手段の1つであると考えられる。この点では公的年金の資産運用と同様に推定値の不確実性に影響を受けにくく、安定的な資産運用となるロバスト最適化の活用は有効性が高いと考えられる。また個人投資家の資産運用を考えた場合には、公的年金に比べ運用金額が小さいため、そのときの状況に応じてある程度頻繁にポートフォリオを組替えることができる。このことは山本 (2009) でも分析されており、実証分析では月に1回程度のリバランスが最も高いパフォーマンスを獲得できることを示している。つまり、個人投資家向けの投信ファンドが行うような資産運用では、短期的にリバランスを行いながら長期的に安定した資産運用を行うべきであり、そのような資産運用を行ううえで、ロバスト最適化を利用することの有効性が高いと思われる。

そこで本論文では、個人投資家向けの投信ファンドが行う資産運用として、短期的にリバランスを行うポートフォリオ構築に対するロバスト最適化の有効性を検証する。特に近年の不確実性が高まっている環境でどのような資産運用となるのかという点に注目して分析を行った。

次章では、数理計画法を用いた資産運用モデルについて説明を行い、ロバストポートフォリオ最適化を用いることでの問題の変更点について解説する。第3章では、市場データを用いたシミュレーションに利用したデータの説明とシミュレーション結果について報告する。最後に第4章では結論と今後の課題について述べる。

<sup>2</sup> この他の方法として、不確実性を考慮して期待収益率を修正する方法なども提案されている。

## 2. ロバストポートフォリオ最適化を用いた資産運用モデル

### 2.1. 数理計画法を用いた資産運用モデル

はじめに数理計画法を用いた資産運用モデルとして、Markowitz (1952) によって提案された平均・分散モデルについて説明する<sup>3</sup>。平均・分散モデルは、各資産の収益率を不確実な確率変数とし、その平均と分散（標準偏差）をリターンとリスクの尺度として考える。そして数理計画法を用いて最適なリターン・リスク特性を持つポートフォリオを決定するモデルである。

まず市場に  $N$  個の資産  $S_i, i=1,2,\dots,N$  があるものとし、 $R_i$  を資産  $S_i$  の収益率を表す確率変数とする。また、投資家は現在  $x_i^0, i=1,2,\dots,N$  の投資比率で資産  $S_i$  を保有しており、リバランス後の投資比率（ウェイト） $x_i, i=1,2,\dots,N$  を決定するものとする。

このとき、ベクトル  $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  を投資家の所有するポートフォリオとしたとき、ポートフォリオの収益率  $R(x)$  は以下のように表すことができる。

$$R(x) = \sum_{i=1}^N R_i x_i$$

次にポートフォリオ  $x$  のリターンとリスクの指標である期待収益率と分散は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} E[R(x)] &= E\left[\sum_{i=1}^N R_i x_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^N E[R_i] x_i \end{aligned} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} V[R(x)] &= E[(R(x) - E[R(x)])^2] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^N R_i x_i - \sum_{i=1}^N E[R_i] x_i\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])] x_i x_j \dots(2) \end{aligned}$$

ここで  $r_i$  を資産  $i$  の期待収益率、 $\sigma_{ij}$  を資産  $i$  と資産  $j$  の共分散としたとき、(1)式と(2)式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} E[R(x)] &= \sum_{i=1}^N r_i x_i \\ V[R(x)] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

このとき、ある一定のリスク水準の下で期待取

益率が最大となる投資比率（ウェイト）を決定する問題を平均・分散モデルとして以下のように定義する。

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{最大化} \\ x \end{array} \right\} \sum_{i=1}^N r_i x_i \\ & \left. \begin{array}{l} \text{条件} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ 0 \leq x_i \leq u_i, i=1,2,\dots,N \end{array} \end{array} \quad \dots(3)$$

ここで  $\sigma_T$  はターゲットとするリスク上限であり、 $u_i$  は資産  $i$  への最大投資比率を表す定数である。

問題(3)は2次計画問題というクラスの数理計画問題であり、小規模の問題であればExcelを用いて求解することも可能である。つまり、投資家が各資産の期待収益率と資産間の共分散（または標準偏差と相関係数）を推定し、リスク上限を設定することで、その投資家にとって平均的に最も高い収益率が得られるポートフォリオを決定することができるモデルである。

### 2.2. ロバスト最適化の概要

期待収益率や共分散を各資産の過去の収益率を用いて推定する場合、市場が安定していれば妥当性があるが、近年のような不確実性の高い環境では、その妥当性が小さくなると考えられる。特に平均・分散モデルは入力する期待収益率の値が異なると、その解も大きく変化することが知られている。つまり期待収益率の情報が間違っている場合には、真の最適ポートフォリオと大きくかけ離れたポートフォリオを構築してしまう可能性が高い。そこで本論文では、期待収益率情報のみに不確実性を考慮した場合に着目し、ロバスト最適化の紹介を行う<sup>4</sup>。

問題(3)の期待収益率に不確実性を考慮したロバスト最適化問題は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{最大化} \\ x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{最小化} \\ r \in U_r \end{array} \right\} \sum_{i=1}^N r_i x_i \\ & \left. \begin{array}{l} \text{条件} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ 0 \leq x_i \leq u_i, i=1,2,\dots,N \end{array} \end{array} \quad \dots(4)$$

<sup>3</sup> 数理計画法を用いた資産運用モデルの詳細については、山本 (2008)、今野 (1995) が詳しい。

<sup>4</sup> 共分散の不確実性は期待収益率ほど最適ポートフォリオに影響を及ぼさないとされている。山本・鴻丸 (2010) では期待収益率と共分散の両方に不確実性を考慮したロバストポートフォリオ最適化を紹介している。

ここで  $r$  は  $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$  を表す期待収益率ベクトルであり、 $U_r$  は期待収益率ベクトルの不確実性集合である。問題(4)は、期待収益率を1つの値に特定せず、想定しうる範囲  $U_r$  の中で最悪(最小)のケースが起こる場合を想定して、ポートフォリオの期待収益率を最大化する問題として定式化されている。つまり推定値の不確実性を考慮し、保守的に見積もって最適化を行うモデルである。

2.3. 不確実性集合の決定

ロバストポートフォリオ最適化を行う場合、期待収益率が含まれる不確実性集合を決定しなければならない。代表的な期待収益率の不確実性集合には箱型と楕円型の集合が用いられる。はじめに箱型の不確実性集合は、期待収益率の推定値  $\hat{r}_i$  とその許容乖離  $\delta_i$  を用いて以下のように定義される。

$$U_r = \{r \mid |r_i - \hat{r}_i| \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, N\} \quad \dots(5)$$

つまり、各資産の期待収益率  $r_i$  が  $(\hat{r}_i - \delta_i) \sim (\hat{r}_i + \delta_i)$  の値をとると仮定する。空売りを許容しない場合には、期待収益率の最悪ケースは  $(\hat{r}_i - \delta_i)$  となるため、問題(4)の目的関数は以下のように書き表せる。

$$\text{最大化} \sum_{i=1}^N (\hat{r}_i - \delta_i) x_i \quad \dots(6)$$

ここで不確実性集合のパラメータ  $\delta_i$  の決定方法としては、収益率分布に正規分布を仮定し、その期待値の95%信頼水準などを用いて以下の式で統計的に推定する方法が挙げられる。

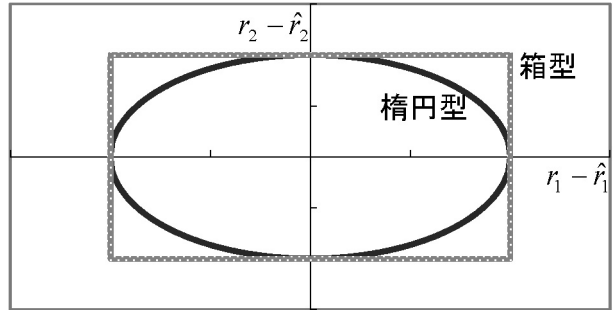
$$\delta_i = z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_i}{\sqrt{T}} \quad \dots(7)$$

ここで  $\sigma_i$  は資産  $i$  の標準偏差、 $T$  は推定期間、 $z_{\alpha/2}$  は標準正規分布における両側確率が  $\alpha\%$  となる点を表す。例えば期待収益率3%、標準偏差5%、推定期間36期の場合、期待収益率の95%信頼区間は  $3\% \pm 1.96 \times 5\% \div \sqrt{36} = [2.67 \sim 3.32]$  となり、期待収益率を2.67%として最適化を行うこととなる。つまりどの程度の確率で発生する最悪ケースを想定するかという信頼水準の値を設定することで、それに応じた  $\delta_i$  を計算することができる。

箱型の不確実性集合では、各資産の不確実性を独立に考慮しているため、全資産の期待収益率が最悪ケースになることを想定してポートフォリオを決定することになる。そのため、保守的過ぎるポートフォリオを構築してしまうことが指摘されている。

そこで資産間の不確実性に関係を持たせた不確実性集合として、楕円型の集合が以下のように提案されている(図2)。

$$U_r = \{r \mid (r - \hat{r})^T \Sigma_r^{-1} (r - \hat{r}) \leq \delta^2\} \quad \dots(8)$$



出所) 著者作成

図2 不確実性集合のイメージ

ここで  $\Sigma_r$  は各資産の期待収益率の共分散行列であり、 $\delta$  は不確実性の大きさを表す定数である。つまり、各資産の期待収益率の間に関係性を持たせることで極端なケースを排除することを想定している。

楕円型の不確実性集合を採用した場合、問題(4)の目的関数は以下のように書き換えることができる (Fabozzi, et al. (2007))。

$$\text{最大化} \sum_{i=1}^N \hat{r}_i x_i - \delta \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^r x_i x_j} \quad \dots(9)$$

ここで  $\sigma_{ij}^r$  は  $\Sigma_r$  の第  $ij$  要素を示す。つまり、通常の期待収益率の項に不確実性のペナルティ関数が追加された形で表現されており、パラメータ  $\delta$  は不確実性の回避度を表しているとみなすことができる。

ここで与えるパラメータとして期待収益率の共分散  $\sigma_{ij}^r$  は収益率分布に定常性を仮定した場合、収益率の共分散  $\sigma_{ij}$  を用いて以下のように導出される (Fabozzi, et al. (2007))。

$$\sigma_{ij}^r = \frac{1}{T} \sigma_{ij}, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N \quad \dots(10)$$

ここで  $T$  は推定期間を表す。

また、不確実性の回避度  $\delta$  は期待収益率の分布に正規性を仮定した場合、資産数  $N$  を自由度とする  $\chi^2$  分布を用いて計算することができる (Fabozzi, et al. (2007))。例えば、信頼水準95%で起こりうる最悪ケースを想定する場合、 $\chi^2$  分布の下側95%点の平方根から  $\delta = 3.32$  と計算することができる。

つまり、投資家は各資産の期待収益率と、共分散(または標準偏差と相関)の情報とともに、

『何%の確率で発生する最悪ケースを想定するか』という不確実性に関する情報（信頼水準）をインプットすることで、それぞれの不確実性集合に応じたロバスト最適化ポートフォリオを得ることができる。

#### 2.4. 平均・分散モデルとの関係

次に通常の平均・分散モデル(3)とロバスト平均・分散モデル(4)の関係を整理する。箱型の不確実性集合を利用した場合、(6)式は平均・分散モデルに入力する期待収益率を $\hat{r}_i$ から $(\hat{r}_i - \delta_i)$ に変更したものと解釈できる。つまり、各資産のリスクと投資家の考える不確実性（信頼水準）に基づいて期待収益率を保守的に修正して平均・分散モデルを解いていることと等しい。

また楕円型の不確実性集合を利用した場合、(10)式から(9)式は以下のように書き換えることができる。

$$\text{最大化}_x \sum_{i=1}^N \hat{r}_i x_i - \frac{\delta}{\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j} \quad \dots(11)$$

この式の第2項はポートフォリオの標準偏差を表しており、 $\delta/\sqrt{T}$ をリスク回避度とする効用関数型の平均・分散モデルと解釈できる。つまりリスク回避度を投資家の許容する不確実性水準に基づいて保守的に決定して平均・分散モデルを解くことと等しいと考えられる。

これより、期待収益率にのみ不確実性を考慮するロバスト平均・分散モデルは、投資家の考える不確実性（信頼水準）に基づいてインプット情報を修正することを示しており、平均・分散モデルの自然な拡張であると考えられる。

次章では、実際に資産運用を行うケースとして、

5つの資産クラスへの投資問題を考え、ロバスト最適化ポートフォリオを構築してその特性を考察する。

### 3. 計算機実験

#### 3.1. 分析に使用したデータ

本論文では資産運用として、表1に示す5つの資産クラスへの資産配分を考える。これらの資産は年金運用などで利用される代表的な資産クラスであり、国内の債券、株式指数、および短期資産と日本を除く先進国の債券、株式指数である。信託銀行や証券会社からこれらの指数のインデックスファンドやETFが販売されているため、個人投資家が利用することもできる指数である。

本論文では、これらの指数の1989年2月から2010年1月までの収益率データを用いて分析を行った。

表1 各資産クラスの指数

資産	指数
国内債券	NOMURA-BPI総合指数
国内株式	TOPIX（配当込み）
外国債券	シティグループ世界（除く日本） 国債インデックス（円ベース）
外国株式	MSCI-KOKUSAIインデックス （配当込み、円ベース）
短期資産	コールレート（有担保翌日）

はじめにこれらの指数のパフォーマンスの統計量、相関係数を表2に、各指数のパフォーマンスの推移と過去36ヶ月で計測したリスク（標準偏差）の推移を図3に示す。表2のシャープレシオは短

表2 各資産のパフォーマンスサマリー（上段）と相関（下段）

資産	リターン (%/年)	標準偏差 (%/年)	シャープ レシオ	勝率 (%)	最大損失 (%/月)	最大損失 年月
国内債券	3.74	3.31	0.66	64.68	-4.09	1998年12月
国内株式	-1.82	19.84	-0.17	48.41	-20.26	2008年10月
外国債券	6.50	10.83	0.46	62.30	-14.36	1998年10月
外国株式	8.33	18.25	0.37	59.13	-25.33	2008年10月
短期資産	1.55	0.69	0.00	100.00	0.00	-

	国内債権	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
国内債券	1.00				
国内株式	-0.06	1.00			
外国債券	0.09	0.06	1.00		
外国株式	0.02	0.44	0.56	1.00	
短期資産	0.14	-0.07	0.00	-0.01	1.00

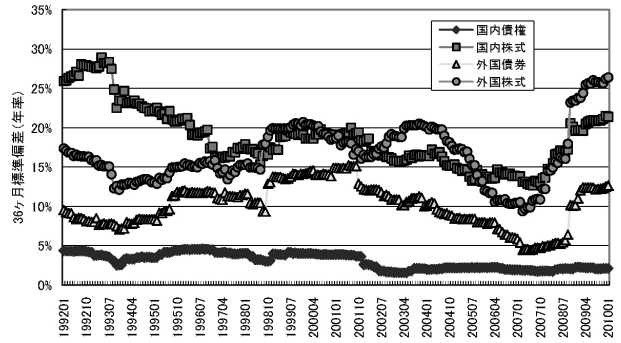
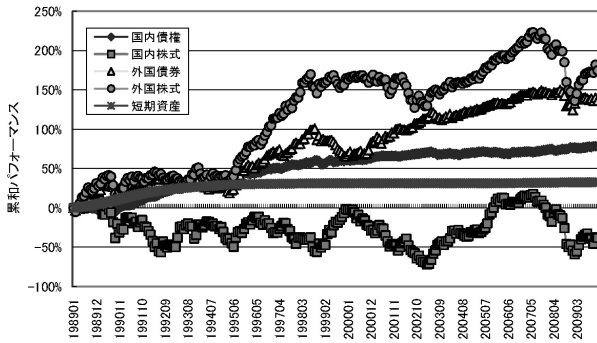


図3 各指数のパフォーマンス(左図)と標準偏差(右図)の推移

期資産の収益率からの超過収益率を標準偏差で割った値であり、リスク1単位当たりの収益率を示す効率性の指標である。また勝率は、分析期間で収益率がプラスの月数を分析期間数で割った値である。

表2、図3左図より短期資産、国内債券については、期間全体で安定的な収益を獲得できている。ただし短期資産に関しては、1995年以降収益率がゼロに近く、横ばいの状況が続いている。外国債券に関しては、為替の影響により国内債券よりも変動は大きい、ある程度安定的な収益率の推移となっている。国内株式、外国株式は他の資産と比べ変動が大きく、相関係数を見ても連動性が高いことが分かる。ただしこの期間のパフォーマンスでは国内株式の収益率が低く、期間全体でマイナスになっている。特にこの2つの株式資産に関しては、2008年後半からリーマンショックによる非常に大きなマイナス収益率が実現していることが特徴である。

また図3右図より、リスクに関しては期間によって違いはあるものの概ね国内株式と外国株式が同程度であり、次に為替の変動リスクがある外国債券、最後に国内債券の順番となっている。特に国内株式、外国株式のリスクに関しては2007年以降徐々に上昇しており、リーマンショックの起こった2008年9月、10月に大きなジャンプがあった後も上昇を続けていることが分かる。

### 3.2. 分析条件

本論文では、これらのデータを用いて不確実性集合を考慮しない平均・分散モデル(3)とロバスト平均・分散モデル(4)を解き、ポートフォリオ特性、パフォーマンスの比較を行った。ここで各資産の期待収益率 $r_i$ と資産間の共分散 $\sigma_{ij}$ は、ポートフォリオを構築する時点から過去36ヶ月の収益率データを用いて推定した。また山本(2009)

と同様にポートフォリオの組替え(リバランス)は毎月行うものとし、制約条件として個別資産へのウェイト上限を50%、リバランス時の回転率上限を20%とした。これらの制約条件は、1つの資産に集中的に投資を行うことを避けることと売買コストを抑制することを目的としている。

不確実性に関しては、第2章で紹介した箱型と楕円型の集合を使用し、不確実性の大きさを決定する信頼水準については30%、50%、70%とした。またターゲットのリスク上限は10%とした<sup>5</sup>。これらの条件をまとめたものが表3である。

表3 設定したパラメータ

分析期間	1992年2月～2010年1月
推定期間	リバランス断面から過去36ヶ月
リバランス頻度	毎月
回転率	20%
投資上限	50%
リスク上限	10%/年
不確実性集合	箱型、楕円型
信頼水準	30%、50%、70%

### 3.3. ポートフォリオ特性

はじめにポートフォリオ特性として、分析期間の平均的なポートフォリオウェイトとリーマンショックで最も大きな損失となった2008年9月末のポートフォリオウェイトを表4に示す。

表4より、不確実性を考慮するほど国内債券や短期資産のウェイトが高まっており、より保守的なポートフォリオを構築していることが分かる。また箱型の不確実性集合に比べ、楕円型の不確実性集合の方が同水準の不確実性を考慮しても保守性が高いことが分かる。本来であれば、期待収益率の相関構造を利用している楕円型の不確実性集合に比べ、各資産の不確実性集合を独立に考える

<sup>5</sup> ターゲットのリスク上限は5%、10%、15%で分析を行ったが、結果となるパフォーマンスの水準が変わるだけであり、本論文の結論には影響はなかった。

表4 ポートフォリオウェイト

不確実性	分析期間平均					2008年9月末断面					
	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産	
考慮しない	27%	20%	29%	21%	3%	1%	0%	50%	49%	0%	
箱型	30%	30%	16%	26%	19%	9%	1%	0%	50%	49%	0%
	50%	31%	13%	24%	19%	14%	1%	0%	50%	49%	0%
	70%	28%	11%	24%	16%	22%	0%	0%	50%	0%	50%
楕円型	30%	35%	8%	21%	13%	24%	40%	0%	50%	0%	10%
	50%	37%	6%	9%	10%	39%	20%	0%	50%	0%	30%
	70%	44%	0%	8%	4%	44%	20%	0%	30%	0%	50%

箱型の不確実性集合の方が保守性が高くなることが想定される。これは表2に示すように今回の設定では資産間の相関が低い資産が少なく、分散効果が現れていないことが原因であると思われる。

最も大きい損失が起こった2008年9月のポートフォリオも同様であり、特に楕円型の不確実性集合では国内債券や短期資産のウェイトを事前に高めている。これは図3の右図に示したとおり、国内株式や外国株式のリスクが2007年以降徐々に大きくなってきているため、リーマンショック前にこれらの資産のウェイトを減らしていたことが原因であると考えられる。後で示すとおり、この結果はリーマンショックの損失をある程度抑えることに繋がっている。

次に分析期間の平均的なポートフォリオ特性を表5に示す。表5より、不確実性を強く考慮するほど事前に推定したリターン、リスクの低いポートフォリオを構築していることが分かる。この原因は、箱型の不確実性集合の場合、(7)式よりリスクの高い資産ほど期待収益率を小さく見積もるため、リスクの低い資産を保有しやすくなるからである。また楕円型の不確実性集合の場合には、(11)式で示したとおり、信頼水準を高めることは平均・分散モデルのリスク回避度を高めることと等価であるため、リスクの低いポートフォリオ

を構築しやすくなるからである。

また不確実性を強く考慮すると、国内債券と短期資産に50%ずつ配分する最も保守的なポートフォリオに近づくため、保有資産数と回転率は低下している。回転率に関しては、最大値20%としているが、不確実性集合を考慮した場合にはそれを超える局面は存在していない。この結果は、ロバスト最適化が通常平均・分散モデルに比べ売買コストを抑制できることを示しており、投資家にとって望ましい性質であると考えられる。

つまりロバスト最適化を用いることで、通常平均・分散モデルに比べ、不確実性集合を考慮した効果により低リスクで安定したポートフォリオを構築することとなる。

### 3.4. パフォーマンス分析

次にロバスト最適化から得られるポートフォリオのパフォーマンスについて分析を行う。パフォーマンスの参考として、毎月全資産に20%ずつ配分したポートフォリオ（均等ポートフォリオ）にリバランスを行う戦略も表示している。パフォーマンスの計測時期は、全分析期間である1992年1月から2010年1月までと不確実性が高まった期間である2007年4月から2010年1月までとした。

はじめに全ケースのパフォーマンスを表6に示

表5 平均ポートフォリオ特性

不確実性	平均期待収益率 (%/年)	平均推定標準偏差 (%/年)	平均保有資産数	平均回転率 (%/月)	
考慮しない	10.39	7.46	2.61	5.51	
箱型	30%	8.46	6.80	2.53	5.18
	50%	7.17	6.36	2.46	4.58
	70%	5.73	5.74	2.41	4.56
楕円型	30%	8.39	4.66	2.33	3.48
	50%	6.94	3.63	2.27	2.88
	70%	5.53	2.86	2.20	2.44

す。表6より、リスクやリターンを考慮しない均等ポートフォリオに比べ通常平均・分散モデルは、通期のリターンが高く損失が小さくなっており、シャープレシオも向上していることが分かる。しかし近年では、推定値の不確実性が高まったため、リスクを考慮しない均等ポートフォリオの方がパフォーマンスの低下を抑えることができています。

次に通常平均・分散モデルに比べ、不確実性集合を考慮したロバストポートフォリオはリスク指標である標準偏差や最大損失の値が通期・直近ともに小さくなっていることが分かる。特に近

年で最も大きい損失となった2008年10月の損失は、不確実性集合を考慮することで15%から25%程度まで抑えられており、注目に値する。その結果として、2007年度以降のパフォーマンスを見るとマイナスにはなっているが全体的に安定したパフォーマンスを維持していた。これは表5で示したように不確実性集合を考慮することで全体的にリスクの低いポートフォリオを構築していることが理由として考えられる。

図4には代表ケースとして、箱型70%、楕円型30%のパフォーマンスの推移を示しており、図5には不確実性集合を考慮しない平均・分散モデル

表6 パフォーマンスサマリー

不確実性	リターン (%/年)		標準偏差 (%/年)		シャープレシオ		2008年10月 損失 (%)	
	1992年1月	2007年4月	1992年1月	2007年4月	1992年1月	2007年4月		
考慮しない	5.00	-12.09	9.77	13.72	0.44	-0.90	-9.12	
箱型	30%	4.59	-12.48	9.41	13.67	0.41	-0.93	-9.12
	50%	5.08	-11.92	9.09	13.39	0.48	-0.91	-9.12
	70%	5.30	-7.13	7.94	9.51	0.58	-0.78	-2.28
楕円型	30%	4.44	-3.27	6.91	7.71	0.54	-0.46	-2.44
	50%	3.31	-3.35	6.45	7.67	0.41	-0.47	-2.36
	70%	2.19	-3.86	5.74	6.40	0.26	-0.65	-1.43
均等ポートフォリオ	3.45	-6.19	7.42	11.21	0.37	-0.58	-11.69	

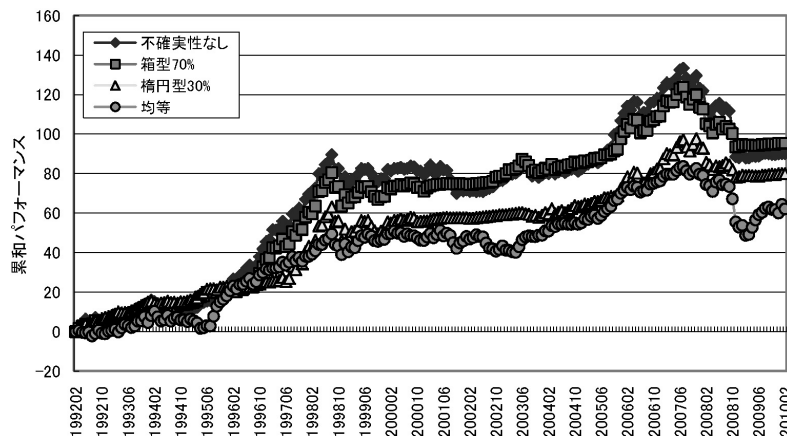


図4 代表ケースのパフォーマンス

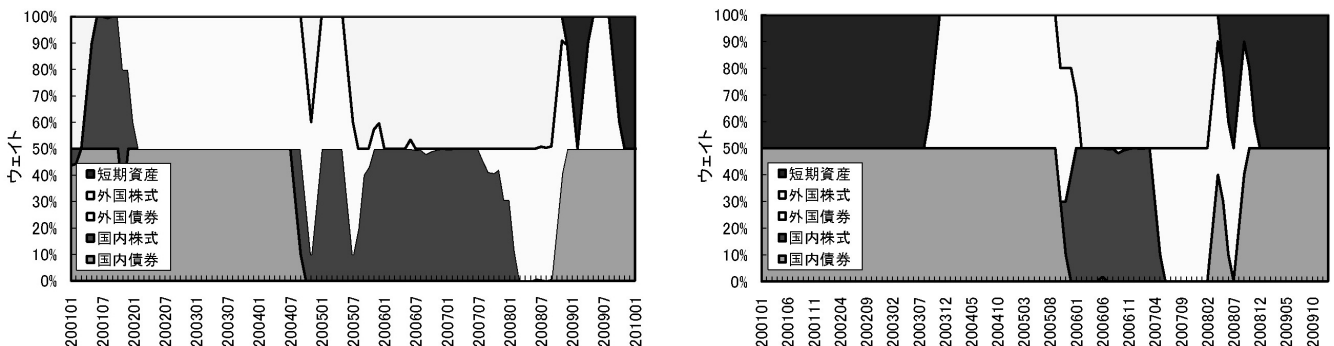


図5 代表ケースのウェイト推移 (左図：不確実性集合なし，右図：楕円型30%)



と楕円型30%のウェイトの推移を示している。図4より、特に楕円型の30%は安定したパフォーマンスの推移が見られ、その他のケースに比べサブプライム危機以降の損失も抑えられていることが分かる。図5を見ると不確実性集合を考慮しない平均・分散モデルがリスクの高い外国株式のウェイトを2008年11月まで保有しているのに対し、楕円型30%は2008年4月までしか保有していない。これは図3右図に見られるように外国株式のリスクが2007年以降高まってきたことを考慮してウェイトを減らしていることが原因であると考えられる。リーマンショックの様な状況で損失を全く出さないことは難しいが、本手法を用いることで、ある程度損失を軽減させ、資産運用を安定的に行える可能性があると思われる。

#### 4. おわりに

本論文では近年のような不確実性の高まった環境での資産運用方法として、ロバストポートフォリオ最適化を利用することで、損失を抑えながら安定的な資産運用が可能であることを紹介した。平均・分散モデルは、各資産の期待収益率や共分散という不確実性を伴うデータを推定しなければならないが、近年の不確実性の高まった状況では信頼に足るデータを推定することは困難である。そのような状況で、『どの程度の範囲で起こりうる不確実性を想定するか』という情報を与えることでそれに応じた投資家の望む保守的なポートフォリオが構築できる本手法は有効性が高いと考えられる。特に個人投資家の資産運用はライフプランニングにおける長期のキャッシュ・アウトフローに備えるものであり、安定的な資産運用を行うことが重要であると考えられることから、本手法の考え方は個人投資家のための資産運用に合ったものである。

有効性検証においても、楕円型の不確実性集合を用いた場合には、特に2007年以降の局面において安定的なパフォーマンスを獲得できることを実証した。本論文によって、このような状況での有効な資産運用方法を示すことは、個人投資家にとって有益になるものと期待する。

今後の課題としては、今回は固定した不確実性の大きさ（信頼水準）を局面によって変更することが考えられる。過去の局面では不確実性が少ないため、高いリターンを獲得できるポートフォリオを構築し、不確実性が高まった局面では低リスクのポートフォリオを構築することで、より効率的な資産運用を行うことができるだろう。

**謝辞.** 本論文の執筆にあたり、有益なコメントを下さいました中央大学今野浩教授、匿名の2名のレフラーの方々に謝意を表します。

#### 参考文献

- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1998) "Robust Convex Optimization," *Mathematics of Operations Research*, 23, pp.769-805.
- Fabozzi, F.J., Kolm, P. N., Pachamanova, D.A. and Focardi, S.M. (2007) *Robust Portfolio Optimization and Management*, John Wiley & Sons.
- 今野 浩, 白川 浩, A. Wijayanayake (2001) 「少額資産運用のためのポートフォリオ最適化モデル」, ファイナンシャル・プランニング研究, 1, pp.8-14.
- 今野 浩 (1995) 「理財工学 I」, 日科技連.
- Markowitz (1959) *H., Portfolio Selection; Efficient Diversification of Investment*, John Wiley & Sons.
- 山本 零 (2008) 「ポートフォリオ最適化」, ファイナンシャル・テクノロジーの過去・現在・未来, 三菱UFJトラスト投資工学研究所, pp.153-192.
- 山本 零 (2009) 「投資信託を用いた個人投資家の資産運用モデル」, ファイナンシャル・プランニング研究, 8, pp.22-31.
- 山本 零, 鴻丸靖弘 (2010) 「ロバストポートフォリオ最適化の活用-公的年金運用の基本ポートフォリオ構築への応用例-」, 証券アナリストジャーナル, 48, pp.64-75.