

## 論 文

# 家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル

## Multi-Period Optimization Model for Household Financial Planning

慶應義塾大学理工学部 枇々木規雄/HIBIKI Norio

### キーワード (Key Words)

家計のリスクマネジメント (household risk management)、多期間最適化 (multi-period optimization)、投資・保険戦略 (investment and insurance strategies)

### 〈要 約〉

世帯の家計は、インフレに伴う実質資産価値の減少リスク、世帯主の死亡や疾病に伴う収入減少リスク、住宅の火災に伴う損失リスクなど様々なリスクにさらされている。ファイナンシャル・プランナーは世帯の家族構成、収入・支出、資産・負債や住宅購入、子供の教育、退職後の生計などの将来に対する希望や目標を参考にして、長期間にわたる投資や保険などの戦略を立案し、その実行を手助けする。本論文では、このような様々なリスクを回避し、安定して資産形成を行うための多期間最適化モデルについて議論する。枇々木他 (2005)、枇々木・小守林 (2006)、Hibiki (2007) の研究成果をもとにして、ファイナンシャル・プランナーが利用可能なより現実的なモデル化を行うために、①税金の支払いも含めた現実の家計のキャッシュ・フローの精緻化、②平準定期保険、逓減定期保険、収入保障保険による保険ポートフォリオとそれぞれを用いた場合の比較、③収入保障保険の給付金に対する所得税を考慮したモデル、④「100-年齢」投資戦略とコンスタント・リバランス戦略のもとでの最適保険戦略モデル、⑤付加保険料の影響、⑥賃金の変動と株式収益率の相関係数の影響について、数値分析によって検証する。

### 1 はじめに

世帯の家計は、インフレに伴う実質資産価値の減少リスク、世帯主の死亡や疾病に伴う収入減少リスク、住宅の火災に伴う損失リスクなど様々なリスクにさらされている。ファイナンシャル・プランナーは世帯の家族構成、収入・支出、資産・負債や住宅購入、子供の教育、退職後の生計などの将来に対する希望や目標を参考にして、長期間にわたる投資や保険などの戦略を立案し、その実行を手助けする。本論文では、このような様々なリスクを回避し、安定して資産形成を行うための多期間最適化モデルについて議論する。

個人の最適な投資戦略については、Merton (1969), Samuelson (1969), Bodie *et al.* (1992) など学術的にも古くから研究が進められており、近年では、Campbell (2006) も家計のファイナンスの重要性を述べている。Chen *et al.* (2005) は、資産配分に加えて、賃金収入、消費支出、生命保険を含む1期間最適化モデルを提唱している。多期間最適化手法を用いたモデルとしては、枇々木他 (2005)、枇々木・小守林 (2006)、Hibiki (2007)

がある。これらの論文では枇々木 (2001) のシミュレーション型多期間最適化モデルが用いられ、モンテカルロ・シミュレーションを利用して不確実性を記述した数理計画問題として定式化を行っている<sup>1</sup>。

本論文では、枇々木他 (2005)、枇々木・小守林 (2006)、Hibiki (2007) (以降、枇々木ら

<sup>1</sup> 多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間最適化モデルが中心となって発展している。しかし、家計に対する多期間最適化モデルを構築する場合、シナリオ・ツリー型多期間最適化ではなく、シミュレーション型多期間最適化を利用する方が適している。その理由は保険に関連する死亡率や火災発生率などは発生確率が低く、サンプルパスで記述するためには多くのパスを必要とするからである。生保標準生命表 (2007) によると、男50歳の死亡率は0.365%であり、ある1本のパスのみで死亡事故の発生を記述するだけでも、274本のパスが必要である。これを多期間にわたってシナリオ・ツリーで記述するためには膨大なツリーを生成しなければならない。たとえば、現在、30歳の世帯主が60歳で退職する場合、30年間にわたる長期間の最適化問題を解くことになるため、シミュレーション型多期間最適化手法が不可欠である。

(2005-2007) とする) の研究成果をもとにして、ファイナンシャル・プランナーが利用可能なより現実的なモデル化を行うために以下の点を考慮し、数値分析によって検証する。

- ①現実の家計のキャッシュ・フローをさらに精緻化する。所得税、住民税、社会保険料の支払いおよびそれらの控除、団体信用生命保険料、住宅購入および保有時にかかる税金などを考慮する。
- ②Hibiki (2007) は家計にとって最適な生命保険を設計するモデルを提案しているが、その実施方法は示していない。そこで0時点での生命保険の購入に加えて、住宅購入時点での解約に関する決定変数を用いてモデルを定式化する。平準定期保険、逓減定期保険、収入保障保険の3種類の生命保険を用いて、最適な組み合わせを求め、1種類の生命保険のみを用いる場合と比較する。
- ③収入保障保険の給付金は雑所得扱いとなるため、所得税を支払う必要がある。このことを考慮したモデルの定式化を行い、問題を解く。
- ④個人の金融資産に占める株式比率を求める簡便な投資戦略として、「100-年齢」(%) を目安とする方法が広く知られている。また、平均・分散モデルなどの1期間モデルを用いる場合には、コンスタント・リバランス戦略を行う。これらの投資戦略のもとでの最適保険戦略を求めるために、資産配分を所与とするモデルを示す。
- ⑤枇々木ら (2005-2007) では考慮されていない付加保険料の影響を調べる<sup>2</sup>。
- ⑥Chenら (2005) が1期間モデルで検討している賃金の変動と株式収益率の相関係数の影響について、本研究で取り扱う多期間モデルでも感度分析を行い、その影響を調べる。

本論文の構成は以下の通りである。2節では問題の構造、世帯の定義および想定する世帯の収入と消費支出、投資資産や各保険について簡単に説明する。3節では多期間最適化モデルの概要を示す。4節ではパラメータの設定およびそれを用いた数値分析を行う。最後に5節でまとめを行う。モデルの定式化はすべて付録に記述する。また、本稿の詳細は、枇々木 (2008) を参照されたい。

## 2 モデルの設定

### (1) 問題の構造

各時点で発生する可処分所得、退職金、遺族年金、生活支出などのキャッシュ・フローを所与と

する。世帯にとって住宅の購入は最大のイベントの一つであり、 $t_e$ 時点で住宅を購入すると仮定する。また、退職後に必要な資金の不足が心配である一方で、できるだけ資金も増やしたいと考える。そこで、退職時点(計画最終時点)の最終富に関するリスクとリターンを考慮して意思決定を行うために、最終富の条件付きバリュー・アット・リスク(CVaR)をリスク尺度、最終富の期待値をリターン尺度としてモデル化を行う。具体的には、最終富のCVaRの下限制約<sup>3</sup>のもとで、期待最終富を最大化するように、以下に示す最適な資産配分と保険購入・解約を決めるモデルを構築する。

- 0時点で資産配分を行い、1時点以降も $T-1$ 時点まで毎時点リバランスを行う。
- 0時点で $T$ 期間満期の生命保険を購入し、住宅購入時点で一部もしくは全部を解約できる。
- 0時点で $T$ 期間満期の医療保険を購入する。
- 1期間満期の火災保険を0時点から $T-1$ 時点まで毎時点購入する。

概要を図1に示す。



図1 問題の構造

### (2) 世帯

世帯とは、1人の世帯主と複数の家族(配偶者、子供など)からなる集団と定義する。世帯主のみが働き、配偶者は専業主婦とする。世帯は金融資産と非金融資産の2種類を保有する。世帯主の死亡事故、世帯主の重大な疾病、住宅の火災事故という3つのリスクが存在し、世帯の収入や支出の構造はこれらのリスクの発生によって影響を受ける<sup>4</sup>。計画最終時点(計画期間数)を $T$ とする。

### (3) 収入

賃金は毎月の現金給与額と年間賞与に分けられる。年間賞与は業績によって変動する可能性があり、資産運用の対象とする株式と勤務する企業の業績は相関を持つと仮定する。賃金から給与所得控除額と所得控除(基礎控除、配偶者控除、扶養控除、社会保険料控除、生命保険料控除)を差し引いて課税所得金額を、定年時において退職金を

<sup>2</sup> 生保標準生命表(2007)を用いて様々な生命保険の付加保険料比率(=付加保険料/純保険料)を計算し、参考にする。

<sup>3</sup> 最終富のCVaRなので、その値が大きくなる方がリスクは小さくなる。また、下限値を退職後に必要な資金とすると、たとえば $\beta=0.8$ の場合、下位20%の確率で生じる最終富の条件付き期待値を退職後に必要な資金以上にするという制約になる。

<sup>4</sup> 世帯主以外は死亡したり、疾病にはかからないと仮定する。

受け取る場合には退職所得控除額を考慮して退職所得金額を計算し、所得税と住民税を計算する。住宅ローンを借りる場合、住宅借入金等特別控除分が所得税から税額控除される。これらを考慮して可処分所得を計算する。世帯主が死亡すると退職金、生命保険金、その後は遺族年金が得られる。

#### (4) 消費支出

消費支出は、生活消費支出と非金融資産の購入支出（住居、家財の購入費用や補修費用）の合計と考える。この他に火災発生による非金融資産の復旧費用がある。生活消費支出を住宅関連支出、子供の教育・生活支出、高額な治療費による支出、その他の生活消費支出の和として計算する。

住宅購入時点では不動産取得税、登録免許税、印紙税、消費税を、住宅保有時には固定資産税、都市計画税を支払う。また、借入の期間や金利などの条件に応じて住宅ローン（借入金）を返済する。団体信用生命保険に加入していれば、世帯主の死亡時点以降の住宅ローンの返済は免除になる。非金融資産の購入支出は消費水準に影響を受けて決定される。火災事故発生に伴う非金融資産の毀損額に対しては復旧費用が生じると仮定する。そのため、火災事故は非金融資産保有額に影響を与えないが、キャッシュ・フローに影響を与える。

#### (5) 投資資産

無リスク資産と複数のリスク資産に投資する。無リスク金利およびリスク資産の収益率分布からランダムサンプルを生成し、リスク資産の価格を計算する。

#### (6) 生命保険

世帯主を被保険者とし、0時点で加入し満期時点をT時点とする生命保険商品の組み合わせ（生命保険ポートフォリオ）を用いて、世帯のニーズにマッチしたキャッシュ・フローを構築する方法を考える。平準定期保険、逓減定期保険、収入保障保険の3種類を対象とする。Hibiki (2007) は団体信用生命保険に加入する場合、世帯主が死亡すると住宅ローンが免除されるので、生命保険の保障額を減少させることが最適であることを示したが、実際には住宅購入時点をあらかじめ決めることは難しい。そこで、0時点で購入した生命保険を住宅購入時に中途解約できるという決定を含めたモデル化を行う。

#### (7) 火災保険

世帯は毎年保有する非金融資産額に応じて保険金額を見直し、1年満期の火災保険を更新（加入）する。枇々木ら (2005-2007) では火災保険の購入金額を決定変数とし、付加保険料を考慮しないで問題が解かれ、最適な火災保険金額はほぼ非金

融資産の毀損額になる（保険金で復旧費用を支払う）という結果が得られている。各時点ごとに決定変数を設定した場合のサンプリング・エラーの検証結果（Hibiki (2007)）も考慮し、非金融資産の毀損額に対するヘッジ比率を決定変数として定式化する。

#### (8) 医療保険

世帯主を被保険者とし、0時点で加入し満期時点をT時点とする医療保険を考える。付加保険料を考慮しないHibiki (2007) では、最適医療保険金額は平均的には疾病による賃金減少分と医療費の合計になるという結果が得られている。火災保険と同様に、賃金減少分と医療費の合計の現在価値に対するヘッジ比率を決定変数とする。

### 3 多期間最適化モデルの概要

以下の点を考慮して、モデルを定式化する<sup>5</sup>。

- (1) 最終富のCVaRの下限値を保ちつつ、期待最終富を最大化する2種類のモデルを定式化する<sup>6</sup>。
  - モデル1：枇々木ら (2005-2007) と同じように、最適な投資・保険戦略を求めるモデル
  - モデル2：以下の2種類の投資戦略（所与の資産配分）のもとで保険戦略のみを求めるモデル
    - 「100-年齢」(%) をリスク資産（株式）比率とする投資戦略（HMA戦略）
    - 1期間モデルで求めた最適投資比率によるコンスタント・リバランス戦略（CR戦略）
- (2) 以下の6種類の決定変数に対する最適解によって、最適な投資・保険戦略を求める。
  - ① 0～T-1時点のリスク資産への投資比率
  - ② 0～T-1時点の現金（無リスク資産）
  - ③ 0時点での3種類の生命保険の購入単位数
  - ④ 住宅購入時点での3種類の生命保険の解約単位数
  - ⑤ 火災による非金融資産の毀損額に対する1年満期火災保険金額のヘッジ比率
  - ⑥ 疾病による賃金減少分と治療費の平均値の現在価値に対する医療保険金額のヘッジ比率
 HMA戦略およびCR戦略では、①は所与、②は最適化後に求めることが可能なので、③～⑥のみが決定変数となる。
- (3) 税金を考慮した生命保険金額のキャッシュ・フローを計算する。平準定期保険や逓減定期保

<sup>5</sup> 数式は付録Aを参照のこと。

<sup>6</sup> モデル1では枇々木ら (2005-2007) で用いられていた投資量決定戦略モデルではなく、非線形な投資比率決定戦略モデルで問題を解くために、反復的に線形計画問題を解く。一方、モデル2は投資比率が決定変数として含まれていないため、線形計画問題として解くことができる。

険に対する相続税は受取人が配偶者の場合には、1億6,000万円までは実質非課税であり、煩雑さを避けるために相続税を考慮せずにモデル化する。一方、収入保障保険は、毎年年金として受け取ると雑所得扱いになる。雑所得金額から所得控除（基礎控除、扶養控除のみと仮定）を行い、課税所得金額を計算する。所得税・住民税は6段階で課税所得金額に応じて税率が変わる区分線形関数として、税金を計算する。

(4) 資産運用以外のキャッシュ・イン・フローは賃金、借入金、各保険金であり、キャッシュ・アウト・フローは消費、各保険料および火災による毀損額の復旧費用である。

#### 4 数値分析

仮定の世帯に対して、様々な数値分析を行う。

##### 4.1 設定条件

###### 4.1.1 世帯の設定

世帯主の年齢は30歳、配偶者は専業主婦で28歳とする。現在1歳の子供がおり、2年後にもう1人誕生予定である<sup>7</sup>。世帯主は金融機関に勤務し、定年は60歳である<sup>8</sup>。現在は賃貸マンションに住んでいるが、10年後には4,000万円のマンションを頭金800万円で購入する予定である。住宅ローンは元利均等返済で、借入金額（3,200万円）、借入期間（20年）、金利（3%）から年間返済額を算出する。また、子供の教育は幼稚園と小学校は公立だが、中学校から大学まで私立で、1人目は私立文系、2人目は私立理系と想定する。リスク資産は株式のみとし、余剰資金は株式か無リスク金利で運用する。

###### 4.1.2 パラメータの設定

各種資料のデータをもとに推定して用いる主なパラメータを以下に示す。

###### (1) 収入

- 賃金：厚生労働省「賃金構造基本統計調査（平成18年）」を用いて、毎月の給与額、年間賞与をそれぞれ年齢の4次関数で推定する。
- 退職金：賃金連動型とし、退職時の年齢（勤続年数）および退職時（死亡時）の賃金から計算する。

###### (2) 消費支出

- 教育費：幼稚園～高校の学習費は、文部科学省「子どもの学習費調査（平成18年度）」、大学の

授業料は文部科学省「平成16年度私立大学入学者に係る初年度学生納付金平均額（定員1人当たり）の調査結果について」、授業料を除く家庭からの大学生の生活費支出は日本学生支援機構「学生生活調査結果（平成16年度）」から計算する。

- 住居、教育関係費を除くその他の消費支出：可処分所得の一次関数を用いる。
- 非金融資産の購入支出：その他の消費支出の一次関数を用いる。

以上の設定のもとで計算された平均収支を図2に示す。上から平均収入（退職金含む、運用収入・

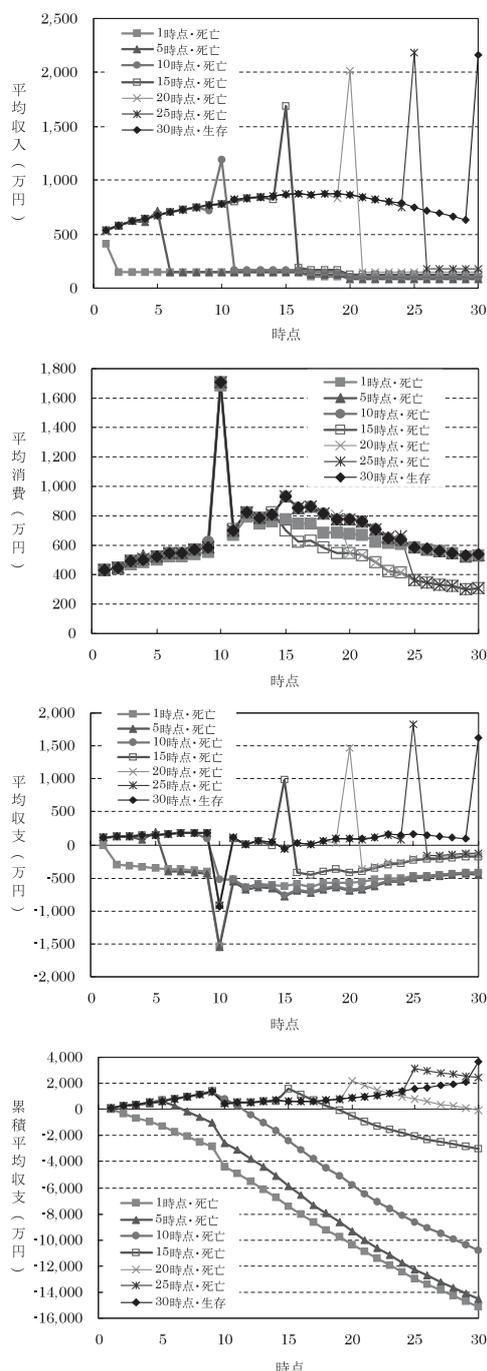


図2 平均収支

<sup>7</sup> 世帯主が1時点（年後）までに死亡した場合には、2人目の子供は生まれないと想定する。

<sup>8</sup> 数値分析の計画期間（T）は30期間である。

保険金を除く)、平均消費(頭金含む、保険料・火災復旧費用を除く)、平均収支(上図の差額)、その累積平均収支(金利0.5%で計算)を示す。

早期に死亡すると、累積平均収支は大きく負になり、生命保険でヘッジする必要がある。

(3) 生命保険

- 死亡率：生保標準生命表(2007)「死亡保険用・男」から生命保険の保険料や保険金を計算する。
- 付加保険料比率(付加保険料/純保険料)：契約年齢、期間、保険金などの異なる45種類(6社)の平準定期保険、8種類(2社)の通減定期保険、201種類(7社)の収入保障保険に対して、予定利率1.5%で付加保険料比率を計算した結果を図3に示す。以降の数値分析では0.5とする。

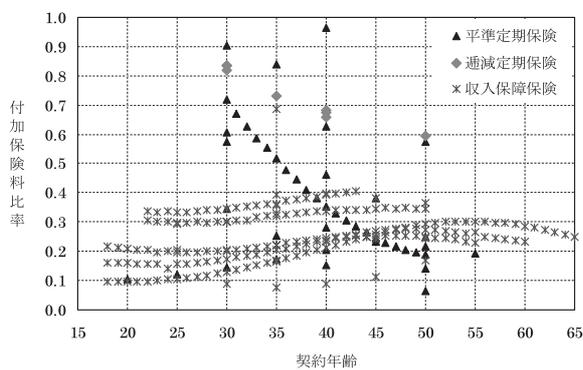


図3 生命保険の付加保険料比率

(4) その他

金融資産の初期保有額は865.4万円、非金融資産の初期保有額は204.4万円とする。

4.2 数値分析の概要

2種類のモデルに対して分析を行う。モデル1とモデル2の結果の値は異なるが、パラメータの違いによる保険戦略への影響はほぼ同様であった。また、モデル2のHMA戦略も2つのCR戦略の中間的な結果が得られた。そのため、紙面の都合上、分析2以降は、モデル1に対する結果のみを示す。計算機はLenovo ThinkPad T43, Pentium IV 2.13GHz, 2GBメモリ、数理計画ソフトウェアはNUOPTVer. 9.2(株数理システム)を用いる。株式の収益率や賃金(ボーナスのみ)のシナリオは正規分布に従っていると仮定する。Mersenne Twisterで一様乱数を生成し、Moroの方法により正規乱数に変換する標準的な方法を用いて、4,000本のパスを計画期間である30期間にわたり生成する<sup>9</sup>。

**分析1**：2種類のモデルを比較する。

**分析2**：生命保険ポートフォリオと1種類の生命保険のみを用いる場合を比較する。

**分析3**：付加保険料の違いによる影響を比較する。

(1) 1つの保険のみ異なる、5種類の付加保険料比率(0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5)で比較する。

(2) 収入保障保険の比率を0.25とし、3種類の通減定期保険の比率(0.5, 0.75, 1.0)で比較する。

**分析4**：賃金の変動と株式収益率の相関係数の違いによる影響を比較する。

$c = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$

4.3 分析1：2種類のモデルの比較

図4に効率的フロンティアを示す。xはCR戦略の投資比率を表し、 $x = 0.1 \sim x = 0.9$ はその投資比率が10%~90%であることを示す。両モデルともに、リスクとリターンをうまく表現できている。HMA戦略の投資比率は0時点で70%、29時点で41%であるため、CR戦略の50%と70%の間に入っている。CR戦略の投資比率の値を変えて、CVaR最大化問題の最適解を用いると、右上のリスクとリターンの組み合わせが構成され、より良いリスクとリターンの組み合わせを得ることができる。モデル2の点は、資産配分の自由度がないため、最適な資産配分も決定するモデル1の効率的フロンティアより左下に位置する<sup>10</sup>。

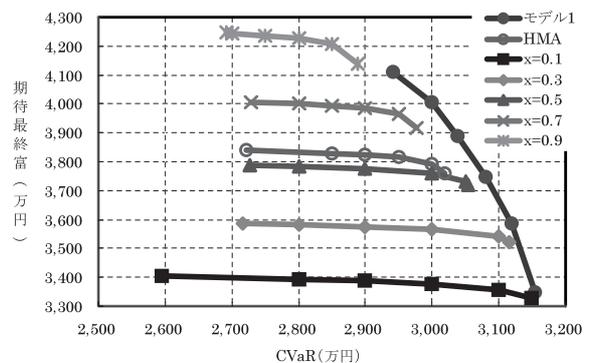


図4 効率的フロンティア

図5にモデル1に対するリスク資産の最適投資比率を示す。CVaRの値が大きくなる(リスクが小さくなる)につれて、投資比率の値も小さくなる。住宅を購入する際に支払う頭金を確保するために、10時点まで現金比率を高めている(リスク

<sup>9</sup> 本論文で利用した計算機のメモリで最大のパス数を用いている。サンプリングエラーの影響は大きいと思われるが、ランダムシードを変えても似たような結果が得られている。サンプリングエラーに関する分析の詳細はHibiki(2007)を参照されたい。

<sup>10</sup> CR戦略で90%投資の場合はモデル1よりも高い期待最終富を得る点が見つかった。この理由として、モデル2では期中の富に対する非負制約が含まれない定式化になっていること、モデル1では大域的最適解の導出を保証していないことの2点が考えられる

資産比率を下げる)。住宅を購入すると、頭金を現金で支払うことによって相対的にリスク資産の比率が上昇する。それ以降は、定年時に安定的な富を築くために、リスクを考慮しない最終期待富最大化を除き、徐々にリスク資産比率は減少する。

最適投資比率は、イベントにも影響を受けるため、年齢だけに依存するHMA戦略や一定比率を用いるCR戦略だけでは不十分である。しかし、CVaR最大化問題を解くモデル2のリスクとリターンとの関係はモデル1の効率的フロンティアに近いこと、紙面の都合上省略するが保険戦略への影響はほぼ同様であること、モデル2の方が高速に解けることを考えると、簡便な投資戦略と保険戦略を組み合わせる場合にはモデル2を利用することも一つの選択肢であろう。

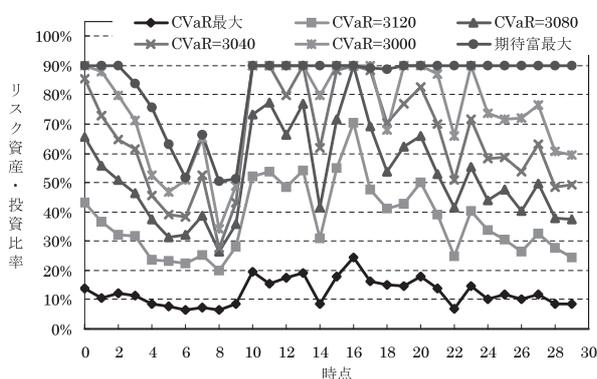


図5 リスク資産の最適投資比率 (モデル1)

#### 4.4 分析2：生命保険ポートフォリオと1種類の生命保険のみを用いる場合の比較

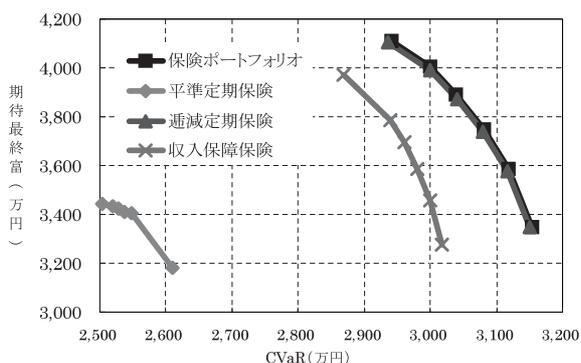


図6 効率的フロンティア

効率的フロンティアを図6に示す。逓減定期保険、収入保障保険、平準定期保険の順番で効率的フロンティアは右上に位置する。保険ポートフォリオによる効率的フロンティアは逓減定期保険のみを利用した場合とほぼ同じになる。平準定期保険は家計のリスク管理上、効率的でないことが分かる。

CVaR最大化問題に対する死亡時点別期待最終

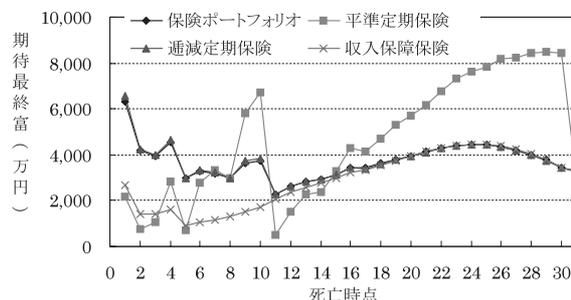


図7 死亡時点別期待最終富

富を図7に示す。平準定期保険のみを購入する場合の死亡時点別期待最終富は、死亡時点が遅くなるほど徐々に大きくなるが、10時点で約60%を解約するため、11時点で死亡すると期待最終富は小さくなる。しかし、それ以降は再び、徐々に上昇する。満期時点で生存していると、保険金を受け取れないため、期待最終富は急激に低くなる。逓減定期保険は、死亡時点が早いと多額の保険金を受け取れるため、10時点までは高い水準を保っている。しかし、10時点で約40%を解約するため、死亡時点別期待最終富は低くなるが、それ以降は死亡時点にかかわらず安定する。収入保障保険は他の保険に比べて、死亡時点にかかわらず、安定した期待最終富が得られる。これは死亡による一時的な資金収入ではなく、賃金の代わりに給付金が見られるため、死亡時点に大きな影響を受けないように最適解が得られるからであると考えられる。

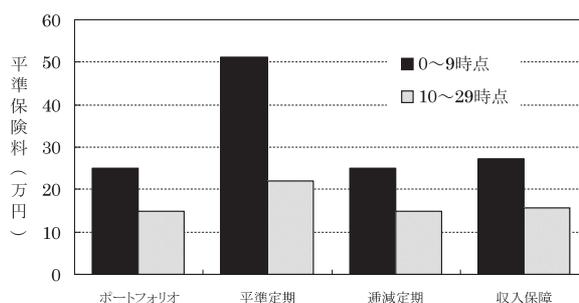


図8 生命保険の平準保険料

CVaR最大化問題を解いたときの生命保険の平準保険料を図8に、保険金額を図9に示す。平準定期保険に比べて、逓減定期保険または収入保障保険を購入する場合には、効率的フロンティアが改善するだけでなく、平準保険料も約半分になる。保険の種類にかかわらず、住宅購入により保険を一部解約することが最適解となる。

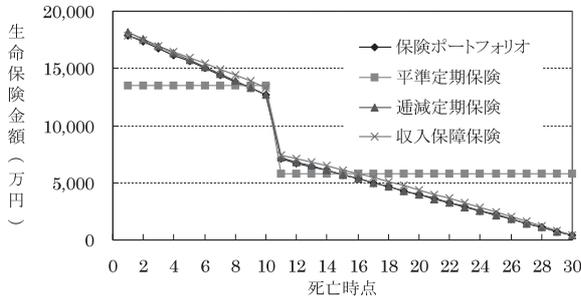


図9 生命保険金額

#### 4.5 分析3：付加保険料の影響

(1) 各保険の付加保険料比率を変化させる場合

様々な付加保険料比率に対する生命保険金額を図10に示す。付加保険料比率 (zetaL) が大きくなるにつれて、生命保険金額の現在価値は小さくなる。死亡による貸金減少リスクをより高額の生命保険金でヘッジすると、リスクを減らすことはできるが、より高い保険料を支払うことになり、期待最終富は減少する。その結果として生命保険金額と付加保険料はトレードオフの関係にある<sup>11</sup>。

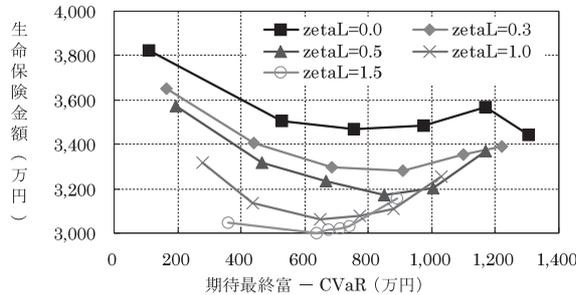


図10 生命保険金額の現在価値

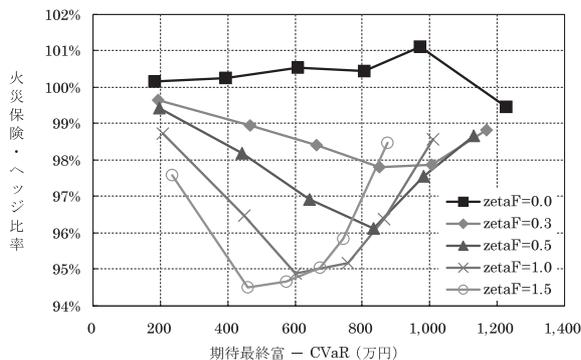


図11 火災保険のヘッジ比率

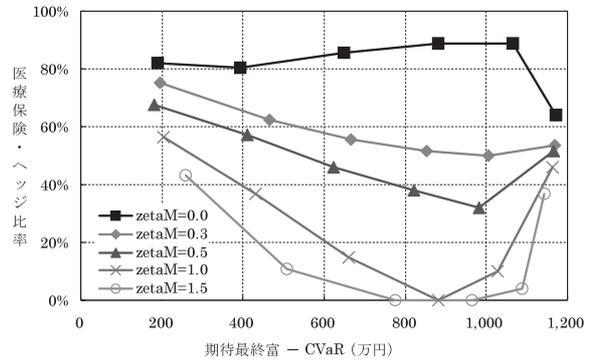


図12 医療保険のヘッジ比率

生命保険と同様、図11に火災保険のヘッジ比率、図12に医療保険のヘッジ比率を示す。火災保険と医療保険も付加保険料比率 (zetaF, zetaM) を高くすると、ヘッジ比率が低くなる。

(2) 生命保険の付加保険料比率が異なる場合

3種類の生命保険の付加保険料比率は、すべて同じ値に設定して分析を行っている。逓減定期保険と収入保障保険は死亡時点が遅くなると受け取る生命保険が減少するという同じ効果をもたらすが、同じ付加保険料比率を用いると、前述のように逓減定期保険の方が税法上有利であり、収入保障保険が割高になる。分析1の結果はこのことを反映して、逓減定期保険の購入単位数の方が収入保障保険に比べて多くなる。一方、図3を見ると、逓減定期保険に比べて、収入保障保険の付加保険料比率は低い。そこで、逓減定期保険と収入保障保険では異なる付加保険料比率を用いて分析を行う。

CVaR最大化問題を解いたときの0時点の購入単位数を図13の上図に、10時点で解約後の残りの単位数を下図に表す。zL1, zL2はそれぞれ逓減定期保険および収入保障保険の付加保険料比率を表す。zL1 = zL2 = 0.5 (分析1) の場合、逓減定期保険の購入単位数は収入保障保険に比べて非常に多い。しかし、zL2 = 0.25に下げた付加保険料比率を固定し、zL1を大きくすると、逓減定期保険の購入単位数が減少し、収入保障保険の購入単位数が増加する。逓減定期保険の付加保険料比率が増加するにつれて、所得税の相対的なデメリットが減少するからである。これに加えて、逓減定期保険は1.5%の予定利率で割り引きされた保険金を受け取るのに対し、死亡時点以降に受け取る収入保障保険は1.5%の予定利率で運用することを前提に給付金が決まることも影響している。株式の期待収益率は2.5%であるが、金利は0.5%であり、確定的な予定利率1.5%はリスク回避の点から考えると相対的に有利であるからである。

<sup>11</sup> 図では一部、順番が入れ替わっている部分がある。軸に用いている指標 (期待最終富 - CVaR) の影響であると考えられる。もしくは、シミュレーション型多期間最適化モデルで投資比率を決定変数とするモデルは非線形計画問題となり、大域的最適解が得られていないために生じていると考えられる。

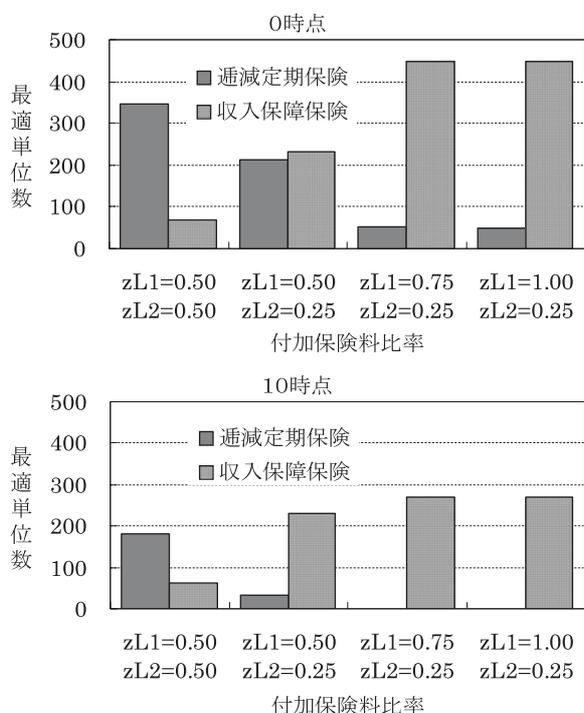


図13 0時点購入単位数と10時点残存単位数

#### 4.6 分析4：賃金と株式の相関係数の影響

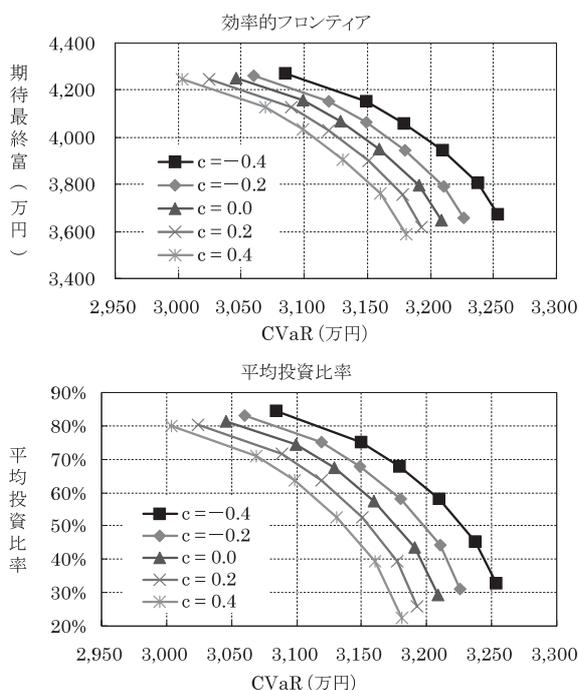


図14 相関係数との関係

図14に賃金の変動と株式収益率の相関係数が異なる場合の結果を示す。相関係数が大きくなるにつれて賃金と株式の分散効果が小さくなるため、上図に示す効率的フロンティアは左下にシフトする。各時点の投資比率の平均とCVaRの関係を下図に示す。同じリスクの値を得るには、相関係数が大きくなるにつれて投資比率を低くする必要が

あることを表しており、Chen *et al.* (2005) と整合的な結果が得られている。

#### 5 おわりに

本研究では、枇々木ら (2005-2007) の研究成果をもとにして、ファイナンシャル・プランナーが利用可能なより現実的なモデル化を行い、様々な数値分析を行った。今後も退職時点以降も含めた計画期間の考慮、共働き世帯も含めた対象世帯の多様化、期間の集約モデルの構築による計算時間の短縮に関してモデルの拡張を行うつもりである。

#### 参考文献

Bodie, Z., Merton, R.C. and Samuelson, W. (1992), "Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.16, No.3-4, pp.427-449.

Campbell, J.Y. (2006), "Household Finance", *The Journal of Finance*, Vol.61, No.4, pp.1553-1604.

Chen, P., Ibbotson, R.G. Milevsky, M. and Zhu, X. (2006), "Human Capital, Asset Allocation, and Life Insurance", *Financial Analysts Journal*, Vol.62, No.1, pp.97-109.

(元利大輔 (2006), 「人的資本に基づいた資産配分と生命保険の意思決定」, 『証券アナリストジャーナル』, Vol.44, No.8, pp.26-41.)

枇々木規雄 (2001), 「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.44, No.2, pp.169-193.

Hibiki, N. (2006), "Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation", *Journal of Banking and Finance*, Vol.30, No.2, pp.365-390.

Hibiki, N. (2007), "Multi-period Optimization Model for a Household, and Optimal Insurance Design", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.50, No.4, pp.463-487.

枇々木規雄 (2008), 「家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル」, Working Paper.

枇々木規雄・小守林克哉 (2006), 「多期間最適資産形成モデル-実践的なモデルへの拡張-」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.2, No.1, pp.3-31.

枇々木規雄・小守林克哉・豊田暢子 (2005), 「多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.1, No.1, pp.45-68.

Merton, R.C. (1969), "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3, pp.247-257.

Samuelson, P.A. (1969), "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3, pp.239-246.

## 付録

### A 多期間最適化モデルの定式化

#### A.1 記号

(1) パラメータ

(A) モデルに関するパラメータ

$I$ : パス数。パスの添字  $i$  の要素 ( $i = 1, \dots, I$ ) の記述は以降省略する。

$T$ : 計画期間数。時点の添字は  $t$  で表す。

(B) リスク事由の発生の有無に関するパラメータ

$\tau_{D,t}^{(i)}$ : パス  $i$  において、世帯主が死亡した時点で降では 1、生存時点では 0 の値をとる。

$\tau_{L,t}^{(i)}$ : パス  $i$  において、世帯主が死亡した時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる。

$\tau_{F,t}^{(i)}$ : パス  $i$  において、火災事故が発生した時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる。

$\tau_{M,t}^{(i)}$ : パス  $i$  において、世帯主が病気になった時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる。

$\lambda_{L,t}$ : 0 時点で生存している世帯主の  $t$  時点での

$$\text{死亡事故発生率} \quad \lambda_{L,t} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{L,t}^{(i)}$$

$$\lambda_F: \text{火災事故発生率} \quad \lambda_F = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{F,t}^{(i)}$$

$\lambda_{M,t}$ : 0 時点で生  $t$  時点での

$$\text{疾病発生率} \quad \lambda_{M,t} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{M,t}^{(i)}$$

(C) 資産に関するパラメータ

$J$ : リスク資産数。リスク資産の添字  $j$  の要素 ( $j = 1, \dots, J$ ) の記述は以降省略する。

$\rho_{j0}$ : 0 時点のリスク資産  $j$  の価格

$\rho_{D,t}^{(i)}$ :  $t$  時点のパス  $i$  のリスク資産  $j$  の価格 ( $t = 1, \dots, T$ )

$r_0$ : 0 時点 (期間 1) の金利

$r_{t-1}^{(i)}$ :  $t-1$  時点 (期間  $t$ ) のパス  $i$  の金利 ( $t = 2, \dots, T$ )

(D) 生命保険に関するパラメータ

$B$ : 生命保険の種類集合 ( $B = \{0, 1, 2\}$ )。添字  $b$  の要素 ( $b \in B$ ) の記述は以降省略する。

$y_{L,b}$ : 生命保険  $b$  の単位当たり平準保険料

$\theta_{L,0}$ : 平準定期保険の単位当たり保険金

$\theta_{L,1,t}$ : 逓減定期保険の  $t$  時点の単位当たり保険金

$\theta_{L,2,t}$ : 収入保障保険の  $t$  時点の単位当たり給付金  
(E) 医療保険に関するパラメータ

$y_M$ : 医療保険の単位当たり平準保険料

$\theta_M$ : 医療保険の単位当たり保険金

$\psi_M$ : 賃金減少分と治療費の平均現在価値をフルヘッジする場合の医療保険の購入単位数

(F) 火災保険に関するパラメータ

$\theta_F$ : 火災保険の単位当たり保険金

$y_F$ : 火災保険の単位当たり保険料

$\psi_{F,t}^{(i)}$ :  $t$  時点の非金融資産に対して、 $t+1$  時点での火災により想定される償却後の非金融資産の毀損額をフルヘッジする場合の火災保険の購入単位数 ( $t=0$  のとき、 $\psi_{F,0}$ )

(G) 世帯の収支と富に関するパラメータ

$E_t^{(i)}$ :  $t$  時点、パス  $i$  の可処分所得収入 (定年時退職金も含む)、遺族年金収入、死亡退職金の合計

$H_1$ : 住宅購入時点の借入金

$C_t^{(i)}$ :  $t$  時点、パス  $i$  の消費支出

$W_{L,t}^{(i)}$ :  $t$  時点、パス  $i$  の富 ( $W_{L,0}$ : 初期富)

$L_C$ : 最終富 ( $T$  時点の金融資産額) の CVaR の下限

$L_v$ : 現金 (無リスク資産) の平均投資比率の下限値

(2) 決定変数

$z_{jt}$ :  $t$  時点のリスク資産  $j$  への投資量 (単位数) を計算する基準変数 ( $t=0, \dots, T-1$ )<sup>12</sup>

$v_0$ : 0 時点の現金 (無リスク資産)

$v_t^{(i)}$ :  $t$  時点、パス  $i$  の現金 (無リスク資産) ( $t=1, \dots, T-1$ )

$u_{L,b}^+$ : 0 時点で購入する生命保険  $b$  の単位数

$u_{L,b}^-$ :  $t_e$  時点で解約する生命保険  $b$  の単位数

$h_F$ : 1 年満期火災保険金額のヘッジ比率

$h_M$ : 医療保険金額のヘッジ比率

$V_\beta$ : 確率水準  $\beta$  の VaR ( $\beta$ -VaR)

$q^{(i)}$ : パス  $i$  の最終富の  $\beta$ -VaR を下回る部分

#### A.2 キャッシュ・フロー

##### A.2.1 収入および消費

(1) 収入

可処分所得を  $w_t^{(i)}$ 、遺族年金を  $a_t^{(i)}$ 、死亡退職金を  $e_t^{(i)}$  とする<sup>13</sup>。金融資産からの投資収益、保険以外の収入 (キャッシュ・イン・フロー) を  $E_t^{(i)}$  とすると、(1) 式のように記述できる。

$$E_t^{(i)} = \left(1 - \tau_{D,t}^{(i)}\right) w_t^{(i)} + \tau_{D,t}^{(i)} a_t^{(i)} + \tau_{L,t}^{(i)} e_t^{(i)} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (1)$$

<sup>12</sup> 投資比率決定戦略モデルでは投資比率を表す変数となる。

<sup>13</sup> 可処分所得には定年時退職金が含まれる。死亡時点  $t_m$  以降の遺族厚生年金を  $a_{0,t_m}^{(i)}$ 、 $t$  時点の遺族基礎年金を  $a_{1,t}^{(i)}$  とするとその合計である遺族年金  $a_t^{(i)}$  は以下のように記述できる。

$$a_t^{(i)} = \sum_{t_m=1}^T \tau_{L,t_m}^{(i)} a_{0,t_m}^{(i)} + a_{1,t}^{(i)}$$

## (2) 消費

消費支出  $C_t^{(i)}$  は (2) 式で計算される。

$$C_t^{(i)} = C_{1,t}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)} \quad (2)$$

ここで、 $C_{1,t}^{(i)}$  は生活消費支出、 $C_{2,t}^{(i)}$  は非金融資産の購入支出である。非金融資産の購入支出は消費水準に依存して決定されると仮定する。その他には  $t_e$  時点で、 $C_{2,t_e}^{(i)}$  に住宅価格が非金融資産に追加される。非金融資産を購入すると、その保有額  $W_{2,t}^{(i)}$  は以下のように計算される。

$$W_{2,1}^{(i)} = (1 - \gamma_1)W_{2,0} + C_{2,1}^{(i)} \quad (3)$$

$$W_{2,t}^{(i)} = (1 - \gamma_1)W_{2,t-1}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)} \quad (t = 2, \dots, T) \quad (4)$$

ここで、 $W_{2,0}$  は 0 時点での非金融資産保有額、 $\gamma_1$  は非金融資産の償却率とする。

$t$  時点で火災事故が発生すると、保有する非金融資産  $W_{2,t-1}^{(i)}$  (償却後の) 一定割合  $\gamma_0$  が毀損し、その復旧のために支出  $A_t^{(i)}$  が生じると仮定する。

$$A_1^{(i)} = \gamma_0(1 - \gamma_1)W_{2,0} \quad (5)$$

$$A_t^{(i)} = \gamma_0(1 - \gamma_1)W_{2,t-1}^{(i)} \quad (t = 2, \dots, T) \quad (6)$$

$A_t^{(i)}$  は非金融資産保有額に影響を与えないが、キャッシュ・フローに影響を与える。

## A.2.2 生命保険金のキャッシュ・フロー

平準定期保険や逓減定期保険のように、世帯主の死亡時点でまとめて受け取る生命保険金には相続税がかかる。しかし、受取人が配偶者の場合、1億6,000万円までは実質非課税であり、煩雑さを避けるために、相続税は考慮せずにモデル化する。一方、収入保障保険のように、給付金を毎年受け取ると、それは雑所得扱いとなる。世帯主の死亡後には給与所得がないと仮定し、雑所得金額を  $Z_t^{(i)}$ 、所得控除を  $EX_t^{(i)}$  とする<sup>14</sup>と、課税所得金額は  $\max(Z_t^{(i)} - EX_t^{(i)}, 0)$  となる。所得税・住民税は6段階で課税所得金額に応じて税率が変わる区分線形関数であるので、税金  $TAX_t^{(i)}$  ( $t_m = 1, \dots, T$ ;  $t = t_m, \dots, T$ ) は以下のように計算される<sup>15</sup>。

$$TAX_t^{(i)} = \sum_{k=1}^6 TR_k^a Z_{t,k}^{(i)} \quad (7)$$

$$Z_t^{(i)} - EX_t^{(i)} \leq \sum_{k=1}^6 Z_{t,k}^{(i)} \quad (8)$$

<sup>14</sup> 雑所得金額、所得控除ともに死亡時点  $t_m$  にも依存する。

<sup>15</sup> 2007年度の税制においては、 $TR_1^a = 0.15$ ,  $TR_2^a = 0.20$ ,  $TR_3^a = 0.30$ ,  $TR_4^a = 0.33$ ,  $TR_5^a = 0.43$ ,  $TR_6^a = 0.50$ ,  $TR_1^b = 195$ ,  $TR_2^b = 135$ ,  $TR_3^b = 365$ ,  $TR_4^b = 205$ ,  $TR_5^b = 900$  ( $TR_k^b$  の単位は万円) である。実際に問題を解く際には賃金を上回るほどの毎年多額の給付金を受け取ることが最適解とならないと考え、例えば、 $Z_{t,k}^{(i)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) のみを決定変数とすることにより問題の規模を縮小する。

$$0 \leq Z_{t,k}^{(i)} \leq TR_k^b \quad (k = 1, \dots, 5), \quad Z_{t,6}^{(i)} \geq 0 \quad (9)$$

保険料  $X_t^-$  は (10) 式、保険金  $X_t^{+(i)}$  は (11) 式で計算される。

$$X_t^- = \sum_{b \in B} y_{L,b} \left( u_{L,b}^+ - \mathbf{1}_{\{t \geq t_e\}} u_{L,b}^- \right) \quad (t = 0, \dots, T-1) \quad (10)$$

$$X_t^{+(i)} = \tau_{L,t}^{(i)} \left\{ \theta_{L,0} \left( u_{L,0}^+ - \mathbf{1}_{\{t \geq t_e + 1\}} u_{L,0}^- \right) + \theta_{L,1,t} \left( u_{L,1}^+ - \mathbf{1}_{\{t \geq t_e + 1\}} u_{L,1}^- \right) \right\} + \tau_{D,t}^{(i)} \left\{ \theta_{L,2,t} \left( u_{L,2}^+ - \mathbf{1}_{\{t_m \geq t_e + 1\}} u_{L,2}^- \right) - \sum_{t_m=1}^T \tau_{L,t_m}^{(i)} TAX_{t_m}^{(i)} \right\} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{1}_{|A|}$  は  $A$  の条件が成立していれば 1、成立しなければ 0 となる定義関数を表す<sup>16</sup>。

## A.2.3 収支および保険のキャッシュ・フロー

資産運用以外のキャッシュ・フローを (12)~(15) 式に示す。キャッシュ・イン・フローは賃金、借入金、保険金であり、キャッシュ・アウト・フローは消費、保険料、火災による毀損額の復旧費用である。

$$D_0^- = X_0^- + y_M \psi_M h_M + y_F \psi_F h_F \quad (12)$$

$$D_t^{+(i)} = E_t^{(i)} + \mathbf{1}_{\{t=t_e\}} H_1 + X_t^{+(i)} + \tau_{F,t}^{(i)} \left( \mathbf{1}_{\{t=1\}} \psi_{F,0} + \mathbf{1}_{\{t \neq 1\}} \psi_{F,t-1}^{(i)} \right) \theta_F h_F + \tau_{M,t}^{(i)} \theta_M \psi_M h_M \quad (t = 1, \dots, T) \quad (13)$$

$$D_t^{-(i)} = C_t^{(i)} + \mathbf{1}_{\{t \neq T\}} \left\{ y_F \psi_{F,t}^{(i)} h_F + \left( 1 - \tau_{D,t}^{(i)} \right) \left( X_t^- + y_M \psi_M h_M \right) \right\} + \tau_{F,t}^{(i)} \left( \mathbf{1}_{\{t=1\}} \psi_{F,0} + \mathbf{1}_{\{t \neq 1\}} \psi_{F,t-1}^{(i)} \right) \theta_F \quad (t = 1, \dots, T) \quad (14)$$

$$D_t^{(i)} = D_t^{+(i)} - D_t^{-(i)} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (15)$$

## A.3 モデル1の定式化

最終富の CVaR の下限値  $L_c$  を保ちつつ、期待最終富を最大化するモデルとして、定式化する。

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_{1,T}^{(i)} \quad (16)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^J \rho_j g(z_{j0}, \rho_{j0}, W_{1,0}) + v_0 + D_0^- = W_{1,0} \quad (17)$$

<sup>16</sup> パス  $i$  における死亡時点  $t_m$  が  $t_e + 1$  時点以降か否かは

$$\mathbf{1}_{\{t_m \geq t_e + 1\}} = \sum_{k=t_e+1}^T \tau_{L,k}^{(i)}$$

で計算される。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} g(z_{j0}, \rho_{j0}, W_{1,0}) + (1+r_0)v_0 + D_1^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} g(z_{j1}, \rho_{j1}^{(i)}, W_{1,1}^{(i)}) + v_1^{(i)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} g(z_{jt}, \rho_{jt}^{(i)}, W_{1,t-1}^{(i)}) + (1+r_{t-1}^{(i)})v_{t-1}^{(i)} \\ &+ D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} g(z_{jt}, \rho_{jt}^{(i)}, W_{1,t}^{(i)}) + v_t^{(i)} \\ & (t=2, \dots, T-1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} W_{1,T}^{(i)} &= \sum_{j=1}^J \rho_{jT}^{(i)} g(z_{jT}, \rho_{jT}^{(i)}, W_{1,T-1}^{(i)}) \\ &+ (1+r_{T-1}^{(i)})v_{T-1}^{(i)} + D_T^{(i)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \geq L_C \quad (21)$$

$$W_{1,T}^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \quad (22)$$

$$W_{1,T}^{(i)} \geq 0 \quad (23)$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad (j=1, \dots, J; t=0, \dots, T-1) \quad (24)$$

$$v_0 \geq L_v \left( \sum_{j=1}^J \rho_{j0} g(z_{j0}, \rho_{j0}, W_{1,0}) + v_0 \right) \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^I v_t^{(i)} \geq L_v \left( \sum_{i=1}^I W_{1,t}^{(i)} \right) \quad (t=1, \dots, T-1) \quad (26)$$

$$v_t^{(i)} \geq 0 \quad (t=1, \dots, T-1) \quad (27)$$

$$u_{L,b}^+ \geq u_{L,b}^- \geq 0 \quad (b \in B) \quad (28)$$

$$h_F \geq 0, h_M \geq 0 \quad (29)$$

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (30)$$

ここで、(18)~(20), (22), (23), (27), (30)式では ( $i=1, \dots, I$ ) の記述を省略している。また、 $V_\beta$  は符号無制約である。(18)式の値が  $W_{1,1}^{(i)}$ 、(19)式の値が  $W_{1,t}^{(i)}$  となり、期中の富を表す<sup>17</sup>。上記の定式化をするにあたり、(7)~(15)式を考慮する必要がある。

$g(z, p, W)$  は投資量 (単位数) を表す関数で、 $g(z, p, W) = \left(\frac{W}{p}\right)z$  で表す。以降、投資量関数と呼ぶ。シミュレーション型モデルは投資戦略によって最適解は異なり、投資量関数の  $p$  や  $W$  に様々な値を入れることによって、各種の投資戦略を記述できる。枇々木ら (2005-2007) では、 $\frac{W}{p}=1$

で記述できる投資量決定戦略モデルを用いているが、本論文では投資比率決定戦略モデルを用いて最適解を求める。投資比率決定戦略は各パスにおける取引後 (リバランス後) のリスク資産  $j$  への投資比率および現金の保有比率を同一にする戦略である。この問題は大規模な非凸非線形計画問題となり、一般的な数値計画法パッケージを用いて最適解を求めることはできない。そこで、Hibiki (2006) が提案した反復アルゴリズムを用いて近似解を求めるが、大域的最適解の導出を保証しない。

#### A.4 モデル2の定式化

HMA戦略およびCR戦略のもとで、保険戦略のみを決めるモデル2の定式化を示す。モデルは線形計画問題として記述できる。

リスク資産  $j$  の投資比率を  $x_{jt}$ 、無リスク資産の投資比率を  $x_{0t}$  とすると、ポートフォリオの収益率  $\mu_{pt}^{(i)}$  は以下のように計算される。

$$\mu_{p1}^{(i)} = \sum_{j=1}^J \mu_{j1}^{(i)} x_{j0} + r_0 x_{00} \quad (31)$$

$$\mu_{pt}^{(i)} = \sum_{j=1}^J \mu_{jt}^{(i)} x_{j,t-1} + r_{t-1}^{(i)} x_{0,t-1} \quad (t=2, \dots, T) \quad (32)$$

最終富  $W_{1,T}^{(i)}$  は (33) 式で計算できる。

$$\begin{aligned} W_{1,T}^{(i)} &= CR_1^{(i)} (W_{1,0} - D_0^-) + \sum_{u=1}^{T-1} CR_{u+1}^{(i)} D_u^{(i)} \\ &+ D_T^{(i)} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{た: } CR_u^{(i)} = \prod_{k=u}^T \left(1 + \mu_{p,k}^{(i)}\right)$$

のモデルの (17)~(20), (24)~(27) 式の代わりに、(33)式を用いて定式化できる。

$$\text{最大化 } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_{1,T}^{(i)} \quad (34)$$

$$\text{制約条件 } (21) \sim (23), (28) \sim (30), (33) \text{ 式}$$

<sup>17</sup> モデル1では、リスク資産と現金に対する非負制約式 ((24), (27) 式) により、期中の富に対しても間接的に非負条件が付くことになる。一方、モデル2では、非負条件は含まれていないため、数値分析においても小さい値ではあるが、期中の富は負になる場合がある。非負条件を含めることも可能であるが、問題の規模は大きくなる。