

## チュートリアル招待論文

## 感染症モデル入門：何を学ぶか

An Introduction to Infection Disease Model: What We Will Learn

慶應義塾大学名誉教授 森平 爽一郎 / *Soichiro MORIDAIRA*

## 1. はじめに

2020年1月に中国武漢市で発生した新型コロナウイルス感染症（COVID-19）は、単なる感染症の流行（Epidemic）にとどまらず、世界規模での流行（Pandemic）となり、多くの人々の健康や生命に関わるリスクとなった。感染を防ぐための究極の方法はワクチンの生産と接種である、しかしそれが可能になるまでは「人と人との接触を避ける」ことが必要である。そのためには、外出制限や、より厳しい都市封鎖（Lockdown）や外出禁止令と言った政策が講じられた。しかし他方で、そうした規制は、経済活動に大きな影響を与え、1930年代の大恐慌以来の失業率の急激な上昇、所得や消費の低下を招き、企業のみならず、家計にも大きな影響を与えることになった。

今回のコロナ危機におけるこうした感染症制御策の指針となったのが、いまから95年前に発表されたKermack and McKendrick (1927) によって提唱された感染症モデルである。その後、彼らのモデルは様々な形での拡張が試みられたが、その基本的な考え方は、この論文で示され、今日SIR (Susceptible (未感染), Infected (感染), Recover (回復)) モデルと呼ばれるようになった感染症モデル (Kermack and McKendrick (1927), 713頁, 式29) である。彼らの論文ではSIRモデルは連立非線形微分方程式の形をとっており、微分方程式に関する知識無しにはその理解は困難である<sup>(1)</sup>。

<sup>(1)</sup> 微分方程式の知識を前提にしたSIRを含む感染症モデルについて初等的な説明したものに佐藤 (1984) がある。数学的により高度な、かつ詳しい解説に南 (2015)、南・水野・南 (2013)、巖佐 (1998)、稲葉 (2002, 2008a, 2008b) などがある。またSIRモデルを初めとする感染症モデルを企業の収益管理に果たす役割について論じた興味深い研究として佐藤・澤木 (2020) の第8章が役立つであろう。

しかし、2020年から2021年1月までの2回の緊急事態宣言は、このSIRモデルから得られる結論に基づいていると言っても過言ではない<sup>(2)</sup>。チュートリアル論文としての本稿では、このSIRモデルを初等数学（高校数学B）のレベルで説明し、その直感的な理解を目指す。また、モデルから導かれる帰結が具体的な感染症制御策とどのような関わりを有しているか、感染症に対する家計の行動指針として何をj得ることができるかを論ずる。

以下では、まずSIRモデルの基礎をなす差分方程式が何かを、金利計算の例を用いて、説明する。その後、最も単純な感染症モデルであるSIRについて直感的な説明を試み、感染症を制御し、収束に向けて何ができるか、何をすべきかを検討する。最後に本稿の要約を示す。

## 2. SIR感染症モデル

## 2.1 差分方程式と微分方程式

感染症モデルとして最も著名であるが簡潔なモデルがSIRモデルである。その嚆矢をなすKermack and McKendrick (1927) では微分方程式体系によってモデルが説明されている。これに対し本稿では差分方程式を用いて説明することにする<sup>(3)</sup>。差分方程式は多くの人にとって馴染みが無い言葉であろうが、高校数学Bでは「数列」における等差数列、等比数列として説明されている。しかし金融の実務家や研究者にとっては、より馴染み深い金利計算が、差分方程式、微分方程式と密接な関係があることがわかれば、その基本的な

<sup>(2)</sup> 西浦 (2020) が分かりやすい。より厳密な議論については西浦・稲葉 (2006) を参照。

<sup>(3)</sup> SIRモデルを含む連続型の感染症モデルを差分方程式で説明する試みについては、瀬野 (2011) を参照のこと。ただし内容を理解するためにはかなり高度な数学が必要である。

考え方は容易に理解できる。例を用いて説明してみよう。

いま100万円を、年金利1パーセントで1年借りたときの1年後の元利合計は、元金+利息=元金+金利×元金=100万円+0.01×100万円=100万円+1万円=101万円として計算できる。2年後の元利合計は同様の計算を繰り返して、101万円+0.01×101万円=102万100円となる。3年目の元利合計も同じように計算できる。こうした計算を一般化し、数式で表現することにしよう。元本を $X_0$ 円、1年後の元利合計を $X_1$ 円、2年後の元利合計を $X_2$ 円、3年後の元利合計を $X_3$ 円、年金利を $r$ パーセントとしよう。元利合計を示す変数 $X$ の添え字 $t$ は年度を表すとする。1年目、2年目、3年目の元利合計は次のように式(1)で表すことができる。

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + rX_0 = 100 + 0.01 \times 100 = 101 \text{万円} \\ X_2 &= X_1 + rX_1 = 101 + 0.01 \times 101 = 102.01 \text{万円} \\ X_3 &= X_2 + rX_2 = 102.01 + 0.01 \times 102.01 = 103.0301 \text{万円} \end{aligned} \quad (1)$$

一般に、 $t$ 年目の元利合計は、この結果から

$$X_t = X_{t-1} + rX_{t-1} = (1+r)X_{t-1} \quad (2)$$

と表すことができる。これは変数 $X_t$ に関する1階の差分方程式(等比数列)と呼ばれる。この差分方程式を解く、つまり、初期投資額と金利が与えられたときの任意の将来年の元利合計を求めるためには2つの方法がある。1つはここで示した繰り返し計算による方法であり、もう1つの方法は1度の計算で解を得る(解析的)方法である。

**方法1 繰り返し計算**：これは元本、つまり最初に借りたお金 $X_0 = 100$ 万円と金利 $r$ が与えられているとして、上の式(1)のような繰り返し計算によって、任意の $t$ 年目の元利合計を求める方法である。

**方法2 1度の計算で解を求める(解析解)**：式(2)から任意の年 $t$ 年目の元利合計は

$$X_t = (1+r)^t X_0 \quad t=1,2,3,\dots \quad (3)$$

と書くことができる(詳細は数学付録1を参照)。この式を高校数学Bの数列では、

$$a_n = ar^{n-1} \quad n=2,3,4,\dots \quad (4)$$

と表現している。式(4)における添え字 $n$ はわれわれの表記では年を示す $t$ に当たり、 $X_0$ に相当するものを初項 $a$ としている。式(4)における $r^{n-1}$ は式(3)では $(1+r)^t$ に当たる。

この式を用いると、元本 $X_0$ と金利 $r$ を与えれ

ば1度の計算で任意の将来年の元利合計を求めることができる。式(3)で $(1+r)^t$ の値は古くは複利表で、最近ではExcelのFV関数によって簡単に計算できる。高校数学Bでは式(4)を更に展開して、計算を簡便にし $a(r^n-1)/(r-1)$ と表現している。

**微分方程式とその解**：多くの感染症モデルは微分方程式を用いて表現されている。金利計算ではそれは「連続」複利計算に相当する。差分方程式では時間間隔を離散(例えば日次)と考えていたのに対し、微分方程式では、時間は連続(瞬間)の変化を仮定している。

式(3)の複利計算では年に1回の利息支払いを仮定している。他方、例えば、住宅ローンでは利息は月次払い、つまり年12回の支払いである。この場合、式(3)は

$$X_t = \left[ \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12} \right]^t X_0 = \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12t} X_0, \quad t=1,2,\dots \quad (5)$$

となる。毎月金利を支払うのであるから適用される金利としては、年金利 $r$ を12ヶ月で割り月利 $r/12$ とし、利払い回数が年12回になるので1年あたり「12乗」の複利計算を行う。しかし本来お金は瞬間、瞬間に借りあるいは貸しているのがあるから、金利の支払いも連続で行われなければいけない。こうした場合、金利支払い回数を期間あたり、たとえば1年間で無限大とすべきである。従って、式(5)は次のようになる(詳しくは数式付録2を参照)<sup>(4)</sup>。

$$X_t = e^{rt} X_0 \quad (6)$$

ここで $e = 2.71828182846\dots$ はネイピア数と呼ばれる定数である。Excelではexp関数によりその計算ができる。式(6)は金利が瞬間、瞬間に払われるときの連続複利公式である。このほうが、複雑な計算を行う場合には便利であるので、感染症の理論を論ずる多くの論文では微分方程式が用いられている。ところで、式(6)は、次の(1階の)微分方程式の解になっている。

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t \quad (7)$$

これを見ると「嫌悪感」を覚える人が多いかもしれないが、恐れることはない。式(2)の差分方程式から容易に、直感的ではあるが、微分方程式を導くことができる。差分方程式表示の式(2)の右

<sup>(4)</sup> 連続複利計算の意味とそれが米国などではすでに通常の銀行預金で行われていることは森平(2008)を参照。

辺の  $X_{t-1}$  を左辺に移項すると、

$$X_t - X_{t-1} = rX_{t-1} \quad (8)$$

となる、いま  $\Delta t$  を時間刻みとしよう。1日刻みのときは  $\Delta t = 1$  日であるので、上の式で元本の増加額を  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ 、 $X_{t-1} \equiv X_{t-\Delta t}$  とすると、それは次のように書き直すことができる。

$$\frac{\Delta X_t}{\Delta t} = rX_{t-\Delta t} \quad (9)$$

利息が瞬間、瞬間支払われるということは、時間刻み  $\Delta t$  はゼロではないが、ゼロに極めて近い微小な正の数であることを意味する。このときの時間刻みを  $dt$  と表すと、 $X_{t-\Delta t} \approx X_t$  とみなせるので、時間が連続的に変化する場合には、式(9)は式(7)で示される微分方程式として表現でき、微分方程式の直感的な解釈は差分方程式を示す式(2)場合と同じになる。

感染症の推移を示す、感染者数、入院患者数、重症患者数などはみな日次データとして発表されていること、また差分表示の方が、理解が容易であることを考慮して、本稿では差分方程式で感染症の推移を表現することにし、その解を求める場合はExcelによる繰り返し計算によるものとする。

「返済がある時の元利合計」と「回復者を考慮した感染者数の変化」；これまで、借入期間中に金利の返済がなく、満期に一括して元本と利子の支払いをするときの総返済額を計算することが差分方程式として表現でき、その解（満期の元利合計）をどのように求めるかを示した。商業ローンなどはその満期一括返済するものもあるが、住宅ローンのように金利の返済と元本の一部の返済を同時に行うものもある。t年目の返済額をその年度初めの元利合計の一定割合  $\gamma$ （パーセント）とすれば、t年目の負債額（元利合計）は次のように表すことができる。

毎年の返済があるときの負債額

$$X_t = X_{t-1} + rX_{t-1} - \gamma X_{t-1} \quad (10)$$

つまり、t年目の元利合計（負債残高） $X_t$  は、右辺で示される1) 1年前の元利合計  $X_{t-1}$  に、2) 利息額  $rX_{t-1}$  を足し、3) 返済額  $\gamma X_{t-1}$  を差し引いたものとして計算できる。

このような考え方を感染症モデルの構築に当てはめてみよう。式(10)で負債残高  $X_t$  を累積感染者数  $I_t$  とし、金利  $r$  を感染症の感染率  $\beta$  で置き換え、返済率  $\gamma$  を回復率としよう。更に時間変化を年から日に置き換えると、式(10)は次のようになる。

$$I_t = I_{t-1} + \beta I_{t-1} - \gamma I_{t-1} \quad (11)$$

この式は、今日までの感染者数は、右辺の1) 昨日までの感染者数  $I_{t-1}$  に、2) 新規感染者数  $\beta I_{t-1}$  を足して、3) 回復者数  $\gamma I_{t-1}$  を差し引いたものとして計算できることを示している。

しかしながら、Kermack and McKendrick (1927) に始まる感染症モデルでは、式(11)の右辺第2項の新規感染者数を、昨日の感染可能人口数  $S_{t-1}$  と昨日の感染者数  $I_{t-1}$  の積  $S_{t-1} I_{t-1}$  に、感染率  $\beta$  を乗じた項で計算している。つまり、次のようになる。

$$I_t = I_{t-1} + \beta S_{t-1} I_{t-1} - \gamma I_{t-1} \quad (12)$$

この点が、Kermack and McKendrick (1927) の核心をなすもっとも重要な点であり、100年近くにわたって彼らの感染症モデルが広く用いられてきた理由の1つである。以下、この点に特に注意しながら Kermack and McKendrick (1927) の SIR 感染症モデルについて説明する。

## 2.2 SIRモデルとは

SIRモデルでは、感染症に罹患した人は、時間と共に、次の3つの状態を推移することを想定する。それらは、1) まだ感染していないがこれから感染する可能性がある（Susceptible）状態、2) 感染症にすでに感染した（Infected）状態、そして3) 感染症から回復（Recover）あるいは死亡した（Removed）状態である。本稿では問題を簡単にするために感染した人がすべて回復できると仮定する。3つの状態を3つの箱（Susceptible（未感染）、Infected（感染）、Recover（回復））で表し、それらの推移を図1のように表す。それ故、これをコンパートメント（Compartments）モデル、あるいは変換図（Transfer diagram）モデルと呼ぶ。

SIRモデルは、個々人の健康状態を記述するのではなく、3つの健康状態をとる「人数」がどのように変化するかを分析、予測しようとする。



図1 SIRモデルを構成する3つの箱（コンパートメント）

ここで、 $t$ 日目の未感染ではあるが感染する可能性あるいは疑いのある人 (Susceptible) の人数を  $S_t$  とし、感染した人 (Infected) の人数を  $I_t$ 、回復 (Recover) した人の人数を  $R_t$  とする。時間  $t$  は  $t = 0, 1, 2, \dots$  日目を表す。従って、 $S_0$  は分析を始めた最初の日を示している。左から右に感染症の推移を示す3つの箱を、次の3本の式によって表す<sup>(5)</sup>。

$$\begin{aligned} \text{感染可能人数} \quad S_{t+1} &= S_t - \beta S_t I_t & (13) \\ \text{感染者数} \quad I_{t+1} &= I_t + \beta S_t I_t - \gamma I_t & (14) \\ \text{回復者数} \quad R_{t+1} &= R_t + \gamma I_t & (15) \end{aligned}$$

ここで、ギリシャ文字のベータ ( $\beta$ ) は感染率を、ガンマ ( $\gamma$ ) は回復率を示す。これらは時間を表す添え字  $t$  がついていないことから分かるように時間経過に伴っても変化をしない定数 (パラメータ) である。

### 2.3 感染可能人数 $S_{t+1}$ : なぜ掛け算の項が現れるのか?

式 (13) は、左辺で示される明日 ( $t + 1$ 日目) の感染可能人数  $S_{t+1}$  が、今日までの感染可能人数  $S_t$  から、今日新たに感染した人の人数 ( $\beta S_t I_t$ ) を差し引いて計算 (予測) できることを示している。つまり、式 (13)  $S_{t+1} = S_t - \beta S_t I_t$  を言葉で表現すると次のようになる。

**明日の感染可能人数 ( $S_{t+1}$ ) = 今日の感染可能人数 ( $S_t$ ) - 今日の新規感染人数 ( $\beta S_t I_t$ )**

今日感染してないけれども、明日以降感染可能な人の数  $S_{t+1}$  は、今日の感染可能人数  $S_t$  から今日新たに感染をした新規感染者数  $\beta S_t I_t$  を差し引いて計算できる。

ここで重要なことは、式 (13) の右辺第2項で示される今日の新規感染者数がどのように計算されているかを理解することである。今日の「新規」感染者数 ( $\beta S_t I_t$ ) は言葉で示すと次のように計算されている。

**$\beta \times S_t \times I_t$  = 感染 (確) 率  $\times$  今日の感染可能人数  $\times$  今日時点の感染者数**

この式では感染状況を示す2つの時間と共に変わりうる変数 ( $S_t, I_t$ ) を掛け算したもの (積) に

一定の値をとる感染率 (感染確率)  $\beta$  をかけて、今日新たに発生した新規感染者数を計算している。状態変数の2つの掛け算が右辺にあることにより「非線形」の差分方程式になりその解析解を求めることは難しい。問題はなぜ、今日の **感染可能人数 ( $S_t$ )  $\times$  今日時点の感染者数 ( $I_t$ )** という掛け算をして新規の感染者数を計算しているかである。この掛け算の直感的な意味を図2で示される簡単な数値例をもって説明することにしよう。

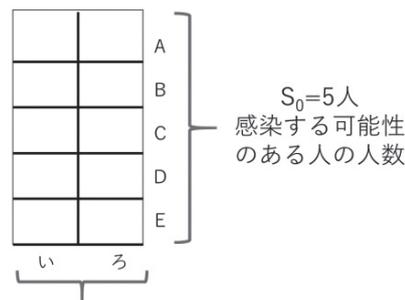


図2 初期時点 ( $t = 0$ ) の新規感染者数を示す  $\beta \times S_0 \times I_0$  の意味。

いま分析時点を最初の日  $t = 0$  としよう。まだ感染をしていないが、これから感染する可能性のある人が5人 (A, B, C, D, E) いたとしよう。つまり  $S_0 = 5$  人である。またすでに感染をした人 (感染者) が2人 (い, ろ) 存在しているとしよう。つまり  $I_0 = 2$  人である。感染症の進行を示すこの2つの変数の積  $S_0 \times I_0 = 5 \times 2 = 10$  は、図3で5行2列からなる10個のマスをもつ長方形 (行列) で表すことができる。

ここで10個というマス目の数を「未感染ではあるが感染可能者が感染者に接触する可能な回数」と解釈しよう。つまり、2人の感染者は5人の非感染者 (これから感染可能な人) に1日の間に1回ずつ接触するとしたら、1日で最大10回の出会い、接触の可能性がある。つまり  $S_0 \times I_0 = 5 \times 2 = 10$  は「可能」な「最大」接触回数である。

しかし、非感染者が感染者に接触したからと言って、すべての非感染者が新型コロナに感染するわけではない。ごく僅かな人だけが感染するのが通常である。こうした点を感染の可能性の大きさを示す感染率 (感染確率)  $\beta$  で調整することにする。つまり最大接触可能数  $S_0 \times I_0$  に1より小さい正の数である感染率 (感染確率)  $\beta$  をかけて、当日新たに感染した人数を計算する。

感染率は何らかの方法によって推定しなければならない。例えば、佐藤 (2021) によれば、2021年1月3日時点における東京都の感染率は

<sup>(5)</sup> Kermack and McKendrick (1927), 713頁, 式 (29) では、これ等は3本の微分方程式  $dS_t/dt = -\beta S_t I_t$ ,  $dI_t/dt = \beta S_t I_t - \gamma I_t$ ,  $dR_t/dt = \gamma I_t$ , で与えられている。

0.018979 ≒ 1.9パーセントである<sup>(6)</sup>。

次に感染者数と回復者数の推移を示す残りの2つの式についてその意味を考えてみよう。

### 2.4 感染者数 $I_{t+1}$

感染者数の推移を示す式(14)の意味は、言葉で表現すると次のようになる。

$$\text{明日の感染者数}(I_{t+1}) = \text{今日までの感染者数}(I_t) + \text{今日新たに感染した人数}(\beta S_t I_t) - \text{今日新たに回復した人数}(\gamma I_t)$$

ここで、今日新しく回復した人の数  $\gamma I_t$  は 今日までの感染者数に、定数である回復率  $\gamma$  をかけたもので計算される。

### 2.5 回復者数 $R_{t+1}$

さらに式(15)で示される明日の回復者数  $R_{t+1}$  を言葉で説明すると

$$\text{明日の累積回復者数}(R_{t+1}) = \text{今日までの累積回復者数}(R_t) + \text{今日新たに回復した人数}(\gamma I_t)$$

となる。

### 2.6 表計算ソフトによる数値計算

以上のモデルは初期値 ( $S_0, I_0, R_0$ ) とパラメータ ( $\beta$  と  $\gamma$ ) を与え、逐次代入計算によって容易に解くことができる。表計算ソフト (ExcelあるいはGoogleシート) による計算例を図3に示す<sup>(6)</sup>。

図3において、計算に先立って与えるべき値 (インプット) は、1) 感染可能人数, 感染者, 回復者の時点ゼロの値, つまり初期値と、2) 定数であるパラメータ (感染率 ( $\beta$ ) と回復率 ( $\gamma$ )) の値である。ここで初期値を感染可能人数 ( $S_0=100$  人), 感染者数 ( $I_0=1$  人), 回復者数 ( $R_0=0$  人) とする。つまり全体で最初の日に101人の人がいて、そのうち一人が感染した人である。パラメータである感染率がセルG2に  $\beta = 1\% = 0.01$ , セルH2に回復率  $\gamma = 10\% = 0.1$  として与えられている。これらの値から直ちに、A列からD列の3行目以降に感染可能人数  $S_t$ , 感染者数  $I_t$ , 回復者数  $R_t$  の推移が計算される。

例えば、1日目の感染可能人数  $S_1$ , 感染者数  $I_1$ , 回復者数  $R_1$  は

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 - \beta S_0 I_0 = 100 - 0.01 \times 100 \times 1 = 99 \text{人} \\ I_1 &= I_0 + \beta S_0 I_0 - \gamma I_0 = 1 + 0.01 \times 100 \times 1 - 0.1 \times 1 \\ &= 1.9 \text{人} \\ R_1 &= R_0 + \gamma I_0 = 0 + 0.1 \times 1 = 0.1 \text{人} \end{aligned}$$

と計算される。

2日目の値は、これら1日目の値をもとにして、

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - \beta S_1 I_1 = 99 - 0.01 \times 99 \times 1.9 = 97.119 \text{人} \\ I_2 &= I_1 + \beta S_1 I_1 - \gamma I_1 = 1.9 + 0.01 \times 99 \times 1.9 - 0.1 \times 1.9 \\ &= 3.591 \text{人} \\ R_2 &= R_1 + \gamma I_1 = 0.1 + 0.1 \times 1.9 = 0.29 \text{人} \end{aligned}$$

と計算できる。これらの数値例とExcelの該当するセルを比較して、どのような計算が行われているかを確認されたい。

このエクセルシートは右のサイトより入手できる。 <http://tapir.jafp.or.jp/gakkai/gakkaisi20.html>

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t:日	S:感染可能人数	I:感染者数	R:回復者数	N:合計		$\beta$ :感染率	$\gamma$ :回復率	$\alpha$ :削減率	Rt:再生産数
2	0	100	1	0	101		0.010	0.100	0.800	10.000
3	1	99.0000	1.9000	0.1000	101.0000					9.900
4	2	97.1190	3.5910	0.2900	101.0000					9.712
5	3	93.6315	6.7194	0.6491	101.0000					9.363
6	4	87.3399	12.3390	1.3210	101.0000					8.734
7	5	76.5631	21.8820	2.5549	101.0000					7.656
8	6	59.8095	36.4473	4.7431	101.0000					5.981
9	7	38.0106	54.6016	8.3879	101.0000					3.801

図3 表計算ソフトによる感染症 (SIR) モデル計算

A列は日次の時間推移 ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ), B列は感染可能人数 ( $S_t$ ), C列は感染者数 ( $I_t$ ), D列は回復者数 ( $R_t$ ) を示す。入力すべき初期値は初期時点 ( $t = 0$ ) の感染可能人口 ( $S_0$ ), 感染者数 ( $I_0$ ), 回復者数 ( $R_0$ ), と定数である感染率 ( $\beta$ ) と回復率 ( $\gamma$ )。

<sup>(6)</sup> この感染率と除去率の推定結果は、 <https://www.fttsus.jp/covinfo/pref-simulation-3/> で公開されている。またこの計算のもとになった「遅れ付き確率SIRモデル」についてはSato, Ito, Sawai, and Iwata (2015) 及び佐藤彰洋 (2020) を参照のこと。

さらに、これらを時系列のグラフにしたものが、図4に示されている。

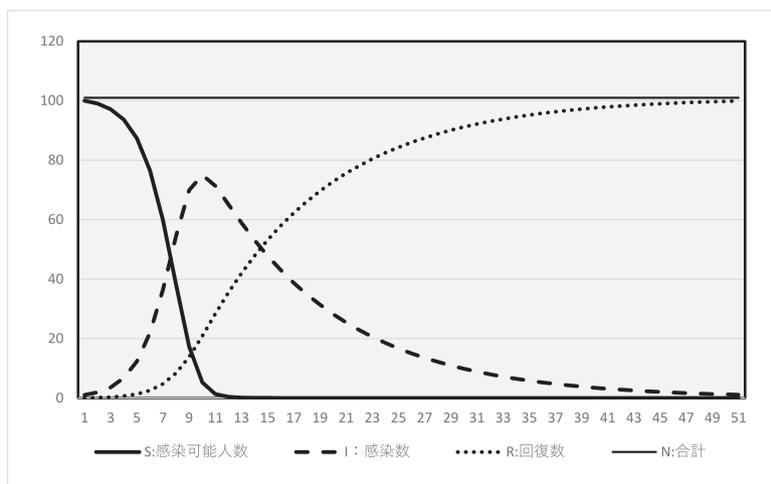


図4 感染可能人数 ( $S_t$ ), 感染者数 ( $I_t$ ), 回復者数 ( $R_t$ ) の日次推移

### 3. 感染症リスク管理

#### 3.1 基本再生産数 $\bar{R}_t$ とは

感染症のリスクを表現する「リスク指標」として最も重要な概念として式(14)から算出される再生産数  $\bar{R}_t$  がある<sup>(7)</sup>.

$$\bar{R}_t \equiv S_t \frac{\beta}{\gamma} \quad (16)$$

この値が1以上であると毎日の感染者数は増加し、最終的には感染爆発に至る。再生産数とは感染者1人が何人に感染させるかを示すという意味でのリスク指標である。感染者数を減らすためには、再生産数を1以下にする必要がある。

再生産数は、感染率 ( $\beta$ ) と回復率 ( $\gamma$ ) が定数であるとしても、感染可能人口が時間とともに変化していくので、それ自身時間に依存した変数である。図3に示したExcelシートのJ列には、以下で示す削減率を80%としたときの基本再生産数の推移を示した。これを図で示すと、次の図5のようになる。

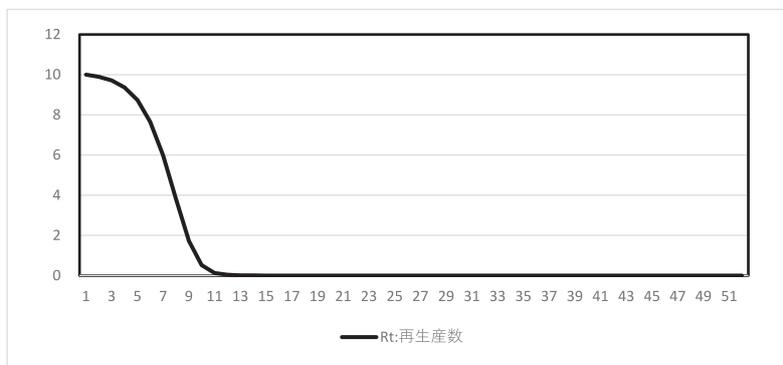


図5 再生産数の推移

図3に示した初期値とパラメータ ( $\beta$  と  $\gamma$ ) の値のもとで、削減率  $\alpha$  を8割としたときの再生産数の推移。この場合は、8日目に再生産数は1を割っている。

図3で示した初期値や感染率  $\beta$  や回復率  $\gamma$ , 削減率  $\alpha$  などのパラメータを変化させ、どのようなときに感染「爆発」が生じるのか、あるいは感染の「収束」が行われるのかを、直感的に理解することができる。

3つのパラメータの数値をインプットするのではなく、PC用のExcelで採用されているスライダーを用いてシミュレーションを容易にしたExcelシートを準備した。それが図6に示されている<sup>(8)</sup>。

#### 3.2 再生産数から導かれるリスク管理のあり方

再生産数は、感染症を制御し、収束するために重要なリスク指標となっている。従って、それが意味するものが何であるかを理解することが肝要である。

式(4)の左辺で示される再生産数 ( $\bar{R}_t$ ) は、右辺で示される3つの要因 ( $S_t, \beta, \gamma$ ) で決まる。これら3つの要因からなる左辺の値を1以下にすることが感染症制御である。それぞれの要因が、リスク管理上いかなる意味を持っているか考えてみよう。

<sup>(7)</sup> 式(6)の再生産数の導出に関しては数式付録4を参照のこと。

<sup>(8)</sup> 図6のシートの改良を行っていただいた慶應義塾大学理工学部の枇々木教授に感謝いたします。

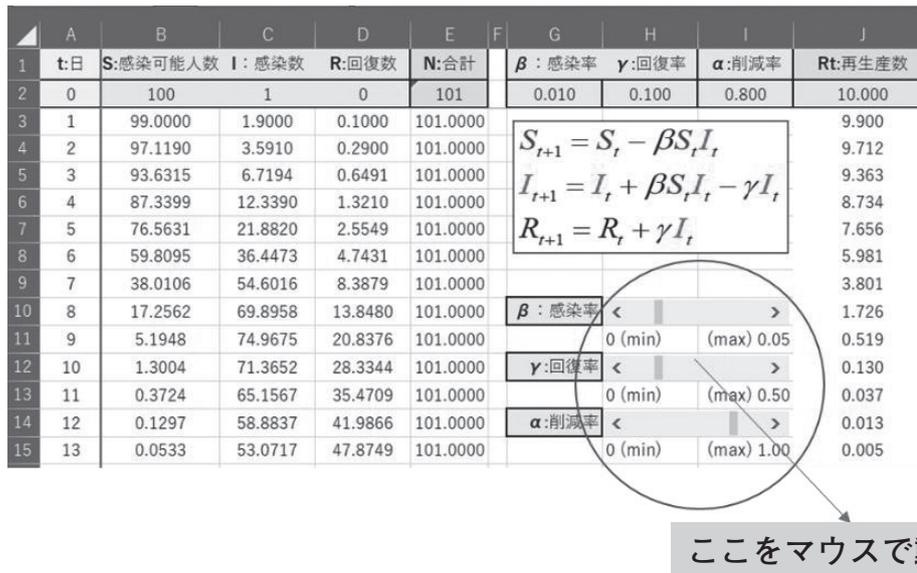


図6 パラメータの変化のシミュレーションを容易にしたExcelシート

(PC上のExcelでのみ稼働することに注意)

### 3.2.1 感染可能人口 $S_t$ の削減

殺処分とロックダウン：再生産数を1以下にするためには、まず感染可能人口  $S_t$  を減らすことである。鳥や豚インフルエンザなどではこれは殺処分に相当し、世界各国で頻繁に行われている。今回のコロナ禍では、デンマークでCOVID-19がミンクにも感染したことがわかり、約1,000万匹のミンクが殺処分の対象になった。しかし、人間の場合にはそのようなことは出来ない。代替案として、感染可能人口のかなりの部分を隔離したり、都市封鎖（ロックダウン）、あるいはより緩やかには日本でおこなわれたような外出制限の要請（緊急事態宣言）の対象にしたりすることによって、実質的に感染可能人口を削減し、再生産数を1以下にしようとする。

2020年の4月7日に発令された所謂コロナ禍第1波に対する緊急事態宣言では外出人口の削減率8割が目標とされた<sup>(9)</sup>。SIRモデルの観点からは感染可能人口を8割減らす事によって、1ヶ月程度を目標に再生産数を1以下にしようとしたのである<sup>(10)</sup>。この場合、式(16)の再生産数を、当時感染が進行中であった西ドイツでの基本再生産数2.5を適用し、80%の感染可能人口の削減、言い換えれば、市中での人の往来を常時の2割程度にすることを考えた。定数 $\alpha$ を削減率とし、 $\alpha=0.8$ とすれば、実質的な再生産数は次のようになる。

$$(1-\alpha)S_t \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) = (1-\alpha)\bar{R}_t = (1-0.8)2.5 = 0.5 < 1.0$$

実質的な再生産数は0.5となり感染症は収束した。

ワクチンの接種：感染「可能」人口を削減するもう一つの方法は、ワクチンを接種することにより体内に抗体を作り、感染「可能」な人口を減らすことである。これが究極的な感染症の制御策であり、この方法により、唯一、世界的な感染症の流行であるパンデミックを収束させることができる。

しかしながら、ワクチン接種により抗体を作ることができる可能性は、ワクチンの種類ごとに異なり、5割から9割のばらつきがあると言われていた。また、必要な2回の接種を行った後、抗体が有効である期間がどのくらい持続するかはまだ良くわかっていない。季節性インフルエンザのワクチンに関しては毎年の接種が必要である。新型コロナに対しては同様なことがあり得るかもしれない。更に、新型コロナのウイルスは常時変異を繰り返していると言われる。既存のワクチンが変異をしたコロナウイルスに対し有効でないという事態もありうるかもしれない。

また、ワクチンの接種を受けるか受けないかは、ワクチンそのものの有効性だけでなく、経済、社会、政治的な要因に大きな影響を受ける。再生産数を1以下にするためには、一国の国民の少なくとも、7から8割程度の人口のワクチン接種が必要であるとされるが、国ごとに異なる社会、政治、

<sup>(9)</sup> 新型コロナウイルス感染症対策専門家会議（2020）にその詳細が述べられている。

<sup>(10)</sup> より詳しいが分かりやすい議論については西浦（2020）を参照。

経済要因により、それが可能でないかもしれない。

### 3.2.2 感染率 $\beta$ の減少

再生産数を1以下にするためには、その他2つの条件が与えられたとして、感染率 $\beta$ を小さくすればよい。感染率 $\beta$ に影響を与える有効な要因として学術的な研究からわかっていることは極めて単純なことである。つまり、1) (社会的な) 距離を保つ、2) マスクをする、3) 目を防御する(メガネやゴーグルをする)、4) 手を洗う・消毒する、などである。この中で1) から3) については、Schünemann (2020) の感染症制御に関するサーベイ論文によってその有効性が検証されている。Schünemann (2020) は新型コロナへの対応方法の有効性を論じた数百の論文を集め、それらに共通して見られる、しかも確度の高い方法を導き出そうとするメタ分析という統計手法をつかって、新型コロナウイルス対策として何が重要なかを見つけ出そうとした。

この中でもマスクをすることが特に重要であることが、Gandhi and Rutherford (2020) や Chan et al. (2020) などによって確認されている。Gandhi and Rutherford (2020) はマスクをすることはワクチンが開発されるまでの「種痘」の役割を果たすものと述べている。Chan et al. (2020) では、マスクは新型コロナ感染を防ぐ絶対的なものではないが、感染したときに重症化を防ぎ、またそのことは抗体を作るワクチンのような役割を果たしていることをマウスを使った実験で確かめている。

### 3.2.3 回復率 $\gamma$ の増加

基本再生産数を1以下にするための第3の要因は、式(16)の右辺の分母の項をなす回復率 $\gamma$ を高めることである。つまり、感染した人を回復させる可能性を高めることである。感染した人が回復すると抗体が生成されるので、感染可能人口を減らすことになる。回復率は具体的には、既存の薬のなかで新型コロナに有効な薬品を確認する(トシリズマブ、アビガンなど)、あるいは新薬を開発することなどである。また、人的、物的な医療資源を整備することなどが挙げられる。これらの整備は、上の2つの要因と異なり、その国の人々の社会的、政治的考え方などの要因によって左右されるものではない。要は如何にこうした資源の開発と普及に経済的な支援を行えるかである。

### 3.2.4 感染症モデルの応用

SIRモデルは感染症の推移を示す最も簡単なモデルであるが、それにとどまらず様々な人文・社会科学への応用が行われている<sup>(11)</sup>。そうしたものとして、1) 流言飛語などの拡散、2) インターネット上のフェイクニュースやコンピュータウイルスの伝播、3) 新製品の普及過程の分析(Fibich, 2016)、4) 人口(移民)の移動、5) 失業の連鎖、などの分析が挙げられる。

ファイナンスの分野では、所謂リーマンショックがもたらしたグローバルな倒産の連鎖にSIRモデルに回復のみならず死亡を取り入れた拡張モデルを適用した研究が多くある(例えば、Fisher (2013), Chevallier (2020) など)。パンデミックリスクと金融リスクの間の対応関係を図7に示した。これから感染症とリーマンショック(global

パンデミックリスク	金融危機
ウイルス: COVID-19	サブプライムローン (証券化商品)
感染可能人数: S	全ての金融機関・投資家: S
未発症人数: E	投資適格会社: E
感染人数: I	投資不適格会社: I
死亡: dl	デフォルト会社数: dl
回復人数: R	回復会社数: R

図7 パンデミックリスクと金融リスクの間の対応

<sup>(11)</sup> SIRモデルの社会人文科学への応用例の展望論文としては、例えば、Rodrigues (2016) を参照。

financial crisis, 2008 financial crisis) とに明らかな対応関係を見い出せ、SIRモデルを適用した金融危機の分析が可能になることが分かる。

また、Eichenbaum *et al.* (2020a, 2020b) による一連の研究では、ここで議論をした最も簡単なSIRモデルを、伝統的なミクロあるいはマクロ経済モデルの中に取り込んで、様々な感染症対策がもたらすその経済的なインプリケーションを議論している。

#### 4. おわりに

最も簡単な感染症伝播モデルであるSIRモデルについて説明し、それから導かれる再生産数が何を意味するか考えた。また再生産数を1以下にすることにより感染症の収束を果たすことができることを明らかにした。収束を実現するために、再生産数式を構成する、1) 感染可能人口の制御、2) 感染率と、3) 回復率の意味とそれから得ることができる政策上のインプリケーションを議論した。

近年、国や地方自治体がおこなう経済・社会・政治政策決定において、事実に基づく政策決定・管理 (EBPM: Evidence Based Policy Management) の重要性が叫ばれるようになった。すでに経済政策の立案や実施にあたっては、様々な経済の理論と実証モデルによる検討が行われているが、感染症の制御にあたっては本稿で議論をしたSIRモデルとその拡張モデル多くが使われている。ドイツのメルケル首相は、2020年4月のロックダウンに当たり、「再生産数」を示し、それが何を意味するかをドイツ国民の前に示した。

また家計の側でも、またそれを支えるパーソナルファイナンスの研究者やアナリストの立場からでも、こうした感染症モデルの考え方とそれが意味する政策課題に関する理解が必要になるだろう。感染症に対する戦いにおいては、冷静な議論 Cool Head と温かい感情 Warm Heart が必要となろう。

### 数式付録1 複利計算

本文の式(2)より1年, 2年, 3年目の元利合計は, それぞれ, 代入計算により次の様になる.

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + rX_0 = (1+r)X_0 \\ X_2 &= X_1 + rX_1 = (1+r)X_1 = (1+r)(1+r)X_0 = (1+r)^2 X_0 \\ X_3 &= X_2 + rX_2 = (1+r)X_2 = (1+r)(1+r)^2 X_0 = (1+r)^3 X_0 \end{aligned}$$

これから, 一般に  $t$  年目の元利合計は,  $X_t = (1+r)^t X_0$  となることが分かる.

数式付録2 ネイピア数の定義は,  $m \equiv 1/N$  と置いたときに,

$$e = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = \lim_{m \rightarrow 0} (1+m)^{\frac{1}{m}}$$

であるので, 金利計算においてこれを適用すると,  $h \equiv r/N$  と置けば,  $N = \frac{1}{h}r$  であるので

$$X_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt} X_0 = \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{rt} X_0 = \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{rt} X_0 = e^{rt} X_0$$

が成立する.

数式付録3 基本再生産数:  $\bar{R}_t \equiv S_t \frac{\beta}{\gamma}$  の導出

式(2)の右辺で感染者数  $I_t$  を括りだすと,

$$\begin{aligned} I_{t+1} &= I_t + \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ &= (1 + \beta S_t - \gamma) I_t \end{aligned} \quad (1)$$

となる. 右辺の括弧内の値が1以上であると感染者数は増加する. 言い換えれば, 括弧内の値が,  $(\beta S_t - \gamma) > 0$  つまり  $S_t > \frac{\gamma}{\beta}$  であれば感染者数は増加する. 両辺を  $\gamma/\beta$  で割って整理すると,

$$\bar{R}_t \equiv S_t \frac{\beta}{\gamma} \quad (2)$$

を得る. この結果を  $t$  日目の基本再生産数と呼び  $\bar{R}_t$  で示す.

### 参考文献

- Chan, J. F. W., Yuan, S., Zhang, A. J., et al. (2020), "Surgical Mask Partition Reduces the Risk of Non-Contact Transmission in a Golden Syrian Hamster Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19)," *Clinical Infectious Diseases*.
- Chevallier, J. (2020), "COVID-19 Pandemic and Financial Contagion," *Journal of Risk and Financial Management*, 13(12), 309.
- Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., and Trabandt, M. (2020a), "The Macroeconomics of Epidemics (No. w26882)," *National Bureau of Economic Research*.
- Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., and Trabandt, M. (2020b), "Epidemics in the Neoclassical and New Keynesian Models," *National Bureau of Economic Research*, 20.
- Fibich, G. (2016), "Bass-SIR Model for Diffusion of New Products in Social Networks," *Physical Review E*, 94(3), 032305.
- Fisher, E. (2013), "A Biological Approach for Financial Network Contagion Based on the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Model," *Análisis Económico*, 28(69), pp.109-128.
- Gandhi, M. and Rutherford, G. W. (2020), "Facial Masking for Covid-19—Potential for "Variolation" as We Await a Vaccine," *New England Journal of Medicine*, 383(18).
- 廣瀬英雄, 松隈和広, 作村建紀 (2011) 「感染症拡大予測モデルとその考察」『情報処理学会論文誌数理モデル化と応用』4(3) 102-109
- 稲葉寿 (2008a) 『感染症の数理モデル』培風館.

- 稲葉寿 (2008b) 「微分方程式と感染症数理疫学」『数理科学』, 46(4), 19-25.
- 稲葉寿 (2002) 『数理人口学』 東京大学出版会.
- 巖佐庸 (1998) 『数理生物学入門』 共立出版.
- Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927), "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics," *Proceedings of the royal society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical and Physical Character*, 115 (772), pp.700-721.
- 南就将 (2015) 「感染症流行の数理モデル: 大学初年次で学ぶ数学の応用例」『慶應義塾大学日吉紀要 自然科学』(58) 33-51.
- 南就将, 水野洸太, 南隆二 (2013) 「異なる接触頻度を持つ個体からなる人口集団における感染症流行のモデル化について」『慶應義塾大学日吉紀要 自然科学』(53) 23-44.
- 森平爽一郎 (2008) 『物語 (エピソード) で読み解くファイナンス入門』 日経ビジネス人文庫 日経新聞出版.
- 西浦博 (2020) 「「8割おじさん」の数理モデルとその根拠」『ニューズウィーク日本版』 2020年6月9日号 <https://www.newsweekjapan.jp/stories/world/2020/06/8-39.php> (2021年1月14日)
- 西浦博, 稲葉寿 (2006) 「感染症流行の予測: 感染症数理モデルにおける定量的課題」, 『統計数理』, 54(2), 461-480.
- Rodrigues, H. S. (2016), "Application of SIR Epidemiological Model: New Trends," arXivpreprint arXiv:1611.02565
- 佐藤彰洋 (2020) 「遅れ付確率的SIRモデル」  
<https://www.fttsus.jp/covinfo/pref-simulation-20200509/#model> (2021年1月14日)
- Sato, A., Ito, I., Sawai, H., and Iwata, K. (2015), "An Epidemic Simulation with a Delayed Stochastic SIR Model Based on International Socioeconomic-Technological Databases," *2015 IEEE International Conference on Big Data*, 2732-2741. <https://doi.org/10.1109/BigData.2015>.
- 佐藤總夫 (1984) 『自然の数理と社会の数理2』 日本評論社.
- 佐藤公俊, 澤木勝茂 (2020) 『レベニューマネージメント』 共立出版.
- Schünemann, H. J. (2020), "Physical Distancing, Face Masks, and Eye Protection to Prevent Person-to-Person Transmission of SARS-CoV-2 and COVID-19: A Systematic Review and Meta-Analysis," *The Lancet*, [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)31142-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)31142-9)
- 瀬野裕美 (2011) 「離散型Kermack-McKendrick SIRモデルの特性」 数理解析研究所講究録 第1751巻 63-74.
- 新型コロナウイルス感染症対策専門家会議 (2020) 「新型コロナウイルス感染症対策の状況分析・提言」 2020年5月14日  
<https://www.mhlw.go.jp/content/10900000/000635389.pdf> (2021年1月14日)